

ИНСТИТУТ ПО БИОФИЗИКА И БИОМЕДИЦИНСКО ИНЖЕНЕРСТВО
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНТУИЦИОНИСТКИ РАЗМИТИ КОНЮНКЦИИ И ДИЗЮНКЦИИ

Мирослав Руселинов Стоенчев

АВТОРЕФЕРАТ

НА ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД, ПРЕДСТАВЕН ЗА ПРИСЪЖДАНЕ
НА ОБРАЗОВАТЕЛНА И НАУЧНА СТЕПЕН “ДОКТОР” В
ПРОФЕСИОНАЛНО НАПРАВЛЕНИЕ: 04.06 Информатика и Компютърни науки
Шифър: 01.01.12 Информатика

НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ:
ЧЛ.-КОР. ПРОФ. ДМН ДТН КРАСИМИР АТАНАСОВ

София, 2018

Защитата на дисертационният труд ще се състои на от.....ч в заседателната зала на Института по Биофизика и Биомедицинско Инженерство, БАН, (ул. “Акад. Георги Бончев” 21)

Дисертационният труд е обсъждан на разширен научен семинар на секция Биоинформатика и математическо моделиране на ИБФБМИ 24.04.2018г.

Дисертационният труд съдържа увод, четири глави и заключение, 4 фигури, 6 таблици, и е в обем от 111 страници. Цитирани са 140 източника.

Автор: Мирослав Руселинов Стоенчев

ЗАГЛАВИЕ: Интуиционистки размити конюнкции и дизюнкции

Въведение

Първите идеи на математическата логика се появяват преди 23 века в трудовете на старъгръцкия философ Аристотел. В тях той предлага съжденията и предикатите да се оценяват чрез две стойности „лъжа” (0) и „истина” (1). Това двуелементно оценъчно множество е разширено за пръв път през 1926 г., когато полският математик Ян Лукашевски предлага идеята за тризначна логика. Тридесет години по-късно, той разширява идеята си, въвеждайки понятието n -значна или многозначна логика. Следващата стъпка в развитието на тази идея е предложена от Лютфи Заде, който дефинира размитите множества и логика. Новото понятие също е обект на разширения – през 1967 г. се появява първото от тях – размитите множества над решетка, дефинирани от Ж. Гоген а през 1972 година Здислав Павлак предлага грапавите множества (rough sets). Л. Заде дефинира разширение на своите множества – размити множества от втори тип. При всичките тези множества, оценките на елементите им се задава от степен на принадлежност, вярност и т.н., която е число в интервала $[0, 1]$ или е интервал, подинтервал на интервала $[0, 1]$.

Идеята за Интуиционистки размитите множества (ИРМ) е предложена от Красимир Атанасов през февруари 1983 г. и е докладвана пред Младежка научна сесия в Института по техническа кибернетика и роботика (ИТКР) при БАН през юни 1983. При тази идея за пръв път се предлага въвеждане на две независими помежду си степени – на принадлежност, вярност и на непринадлежност, невярност, сборът на които, както и те самите, е число в интервала $[0, 1]$.

Името „ИРМ” е дадено от Георги Гаргов около март – април 1983 г. защото зад дефиницията на това разширение на размитите множества ясно прозира идеята на Лейтцен Брауер за интуиционизма.

През следващите 35 г. ИРМ са обект на активни изследвания не само от създателя им, но и от колеги от повече от 40 страни от Европа (Австрия, Белгия, България, Великобритания, Германия, Гърция, Дания, Испания, Италия, Македония, Полша, Португалия, Румъния, Русия, Словакия, Сърбия, Финландия, Франция, Чехия), Азия (Израел, Индия, Ирак, Иран, Йемен, Йордания, Китай, Саудитска Арабия, Тайван, Турция, Япония), Африка (Египет, Мароко, Нигерия, Тунис, Южна Африка), Америка (Бразилия, Венецуела, Еквадор, Канада, Куба, Мексико, САЩ, Чили), Австралия и Нова Зеландия. Те са автори на над 10 000 публикации, свързани с ИРМ.

През годините, изследванията по ИРМ са се развивали в няколко основни направления:

1. дефиниране на операции и релации над ИРМ,
2. дефиниране на модални, топологични и оператори на ниво,
3. създаване на геометрични интерпретации на ИРМ,
4. дефиниране на разширения на ИРМ (ИРМ над решетка, ИРМ с интервални стойности, ИРМ над различни универсуми, ИРМ от втори и n -ти тип, темпорални ИРМ и други)
5. приложения на ИРМ в различни области (изкуствен интелект, медицина, икономика, транспорт, и др.).

По-надолу ще се спрем накратко на изследванията по първото направление. Дадени са дефиниции на операции конюнкция и дизюнкция, които са аналози на същите операции, но дефинирани над размити множества. Дефинирана е и операция отрицание ($\neg$) по такъв начин, че за всяко ИРМ A е в сила, че $\neg(\neg A) = A$, което съответства на класическото отрицание. През 1988 г. се появяват дефинициите на две интуиционистки размити импликации. Около 15 г. по-късно става ясно, че те са аналози съответно на размитите импликации на Самуел Клини и на Курт Гьодел. Първата от тези две интуиционистки размити импликации (на Клини) поражда класическото отрицание, докато тази на Гьодел – некласическо отрицание. Между 1988 и 1993 г. К. Атанасов, полага основите на интуиционистки размито съждително смятане, интуиционистки размита модална логика и интуиционистки размита темпорална логика, а съвместно с Г. Гаргов – на интуиционистки размито предикатно смятане. Налага се модификация на понятието, предложено още от Аристотел “тавтология”, която да се използва в някои от формулите, задаващи свойствата на новите логики и наречено интуиционистки размита тавтология.

През XXI век става ясно, че могат да се дефинират множество интуиционистки размити импликации, които пораждат свои интуиционистки размити отрицания. През 2006 г. К. Атанасов показва, че Законите на Август Де Морган и Законът за изключеното трето не се удовлетворяват в стандартния им вид, което води до появата на техни модифицирани форми. Те, от своя страна, дават идеята за нови видове импликации. Така, през 2016 г., когато е дадена за печат монографията¹ на К. Атанасов, която по-долу многократно ще цитираме, в нея са описани 185 различни интуиционистки размити импликации и 54 различни интуиционистки размити отрицания. В тази монография се предлагат три схеми, които ще коментираме в Глава 2, за пораждаване на нови интуиционистки размити дизюнкции и конюнкции. На тази основа бяха формулирани следните:

¹Atanassov, K., *Intuitionistic Fuzzy Logics*, Springer, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 351, pp 138, Cham, 2017.

Цел и задачи

Целта на дисертационният труд е за всяка от известните 185 интуиционистки размити импликации да се дефинират конюнкции и дизюнкции съгласно три групи от формули за тяхното получаване, и да се изучат основните им алгебрични свойства. За реализирането на тази цел са формулирани следните задачи:

1. Да се конструират интуиционистки размити конюнкции и дизюнкции по три групи от формули.
2. Да се изследват техните алгебрични свойства - структура на решетка върху множеството на интуиционистки размитите двойки, модулярност, дистрибутивност, закон за изключеното трето, закони на де Морган и модификации.
3. Да се създаде скала относно наредбата в множеството на интуиционистки размитите двойки и да се приложи при процедура за взимане на решение чрез индексирани матрици.

Дисертационният труд съдържа четири глави. В Първа глава, следвайки цитираната монография се дават кратки бележки по интуиционистки размито съждително смятане. Във Втора глава са дават дефинициите на всичките 1110 интуиционистки размити конюнкции и дизюнкции. Техните основни свойства се описват в Трета глава, а в четвърта глава е дадено едно тяхно приложение.

Глава 1

Кратки бележки върху интуиционистка размита логика

1.1 Вярност на твърденията в интуиционистки размитата логика

В класическата логика към всяко твърдение се асоциира негова вярностна стойност: ако твърдението е истина, то неговата стойност се означава с 1, в противен случай – стойността му е 0. В случая на размитата логика, вярностната стойност е реално число от интервала $[0, 1]$ и се нарича “степен на вярност”. В интуиционистки размития случай се разглежда и “степен на невярност” или “степен на невалидност която също е реално число от $[0, 1]$. Така към всяко твърдение p , се асоциират две реални числа, $\mu(p)$ and $\nu(p)$, удовлетворяващи следните условия:

$$\mu(p), \nu(p) \in [0, 1] \text{ и } \mu(p) + \nu(p) \leq 1. \quad (1.1.1)$$

Изображението, дефинирано чрез

$$\pi(p) = 1 - \mu(p) - \nu(p).$$

определя степента на неопределеност. Двойката $\langle \mu(p), \nu(p) \rangle$ удовлетворяваща условието (1.1.1), се нарича “интуиционистки размита двойка” (ИРД). Нека изображението V е дефинирано върху множеството на твърденията $\mathcal{S}$, по такъв начин, че за всяко $p \in \mathcal{S}$:

$$V(p) = \langle \mu(p), \nu(p) \rangle.$$

Следователно $V : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ дава степента на вярност и степента на невярност на всички елементи на $\mathcal{S}$. Твърденията $T \in \mathcal{S}$, за които

$$V(T) = \langle 1, 0 \rangle,$$

се наричат логически верни. Логически неверни са твърденията F за които

$$V(F) = \langle 0, 1 \rangle.$$

При $\nu(p) = 1 - \mu(p)$, $\forall p \in \mathcal{S}$, тоест $V(p) = \langle \mu(p), 1 - \mu(p) \rangle$, се получава частния случай на размита логика.

Могат да съществуват различни $p, q \in S$ за които $\mu(p) = \mu(q)$ и $\nu(p) = \nu(q)$, т.е. $V(p) = V(q)$.

Функциите sg и $\overline{\text{sg}}$ се използват в следващите раздели:

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x > 0 \\ 0 & \text{ако } x \leq 0 \end{cases}, \quad \overline{\text{sg}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако } x > 0 \\ 1 & \text{ако } x \leq 0 \end{cases}.$$

1.2 Интуиционистки размити импликации

Всички дефинирани импликации са посочени в дисертацията и са взети от цитираната монография, като примерен списък на 20 от тях е даден в Таблица 1.1. По-долу $\langle a, b \rangle$ и $\langle c, d \rangle$ са интуиционистки размити двойки, като в таблицата е записан резултата от прилагане на съответната импликация:

$$\langle a, b \rangle \rightarrow_k \langle c, d \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 185.$$

Таблица 1.1. Списък на интуиционистки размитите импликации

$\rightarrow_1$	$\langle \max(b, \min(a, c)), \min(a, d) \rangle$
$\rightarrow_2$	$\langle \overline{\text{sg}}(a - c), \text{dsg}(a - c) \rangle$
$\rightarrow_3$	$\langle 1 - (1 - c)\text{sg}(a - c), \text{dsg}(a - c) \rangle$
$\rightarrow_4$	$\langle \max(b, c), \min(a, d) \rangle$
$\rightarrow_5$	$\langle \min(1, b + c), \max(0, a + d - 1) \rangle$
$\rightarrow_6$	$\langle b + ac, ad \rangle$
$\rightarrow_7$	$\langle \min(\max(b, c), \max(a, b), \max(c, d)), \max(\min(a, d), \min(a, b), \min(c, d)) \rangle$
$\rightarrow_8$	$\langle 1 - (1 - \min(b, c))\text{sg}(a - c), \max(a, d)\text{sg}(a - c)\text{sg}(d - b) \rangle$
$\rightarrow_9$	$\langle b + a^2c, ab + a^2d \rangle$
$\rightarrow_{10}$	$\langle c\overline{\text{sg}}(1 - a) + \text{sg}(1 - a)(\overline{\text{sg}}(1 - c) + b\text{sg}(1 - c)), d\overline{\text{sg}}(1 - a) + a\text{sg}(1 - a)\text{sg}(1 - c) \rangle$
$\rightarrow_{11}$	$\langle 1 - (1 - c)\text{sg}(a - c), \text{dsg}(a - c)\text{sg}(d - b) \rangle$
$\rightarrow_{12}$	$\langle \max(b, c), 1 - \max(b, c) \rangle$
$\rightarrow_{13}$	$\langle b + c - bc, ad \rangle$
$\rightarrow_{14}$	$\langle 1 - (1 - c)\text{sg}(a - c) - d\overline{\text{sg}}(a - c)\text{sg}(d - b), \text{dsg}(d - b) \rangle$
$\rightarrow_{15}$	$\langle 1 - (1 - \min(b, c))\text{sg}(\text{sg}(a - c) + \text{sg}(d - b)) - \min(b, c)\text{sg}(a - c)\text{sg}(d - b), 1 - (1 - \max(a, d))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a - c) + \overline{\text{sg}}(d - b)) - \max(a, d)\overline{\text{sg}}(a - c)\overline{\text{sg}}(d - b) \rangle$
$\rightarrow_{16}$	$\langle \max(\overline{\text{sg}}(a), c), \min(\text{sg}(a), d) \rangle$
$\rightarrow_{17}$	$\langle \max(b, c), \min(ab + a^2, d) \rangle$

(Продължава на следващата страница)

Таблица 1.1 (Продължава от предходната страница)

$\rightarrow_{18}$	$\langle \max(b, c), \min(1 - b, d) \rangle$
$\rightarrow_{19}$	$\langle \max(1 - \text{sg}(\text{sg}(a) + \text{sg}(1 - b)), c), \min(\text{sg}(1 - b), d) \rangle$
$\rightarrow_{20}$	$\langle \max(\overline{\text{sg}}(a), \text{sg}(c)), \min(\text{sg}(a), \overline{\text{sg}}(c)) \rangle$

1.3 Интуиционистки размити отрицания

Дефинираните 185 импликации генерират ИР отрицания чрез формулата

$$\neg \langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle,$$

където $\rightarrow$ е ИР импликация. Пълният списък на генерираните отрицания е посочен в дисертацията, като тук примерен списък на 20 от тях е посочен в таблица 1.2. Някои различни импликации пораждат еднакви отрицания.

Таблица 1.2. Списък на интуиционистки размитите отрицания

$\neg_1$	$\langle b, a \rangle$
$\neg_2$	$\langle \overline{\text{sg}}(a), \text{sg}(a) \rangle$
$\neg_3$	$\langle b, a.b + a^2 \rangle$
$\neg_4$	$\langle b, 1 - b \rangle$
$\neg_5$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - b), \text{sg}(1 - b) \rangle$
$\neg_6$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - b), \text{sg}(a) \rangle$
$\neg_7$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - b), a \rangle$
$\neg_8$	$\langle 1 - a, a \rangle$
$\neg_9$	$\langle \overline{\text{sg}}(a), a \rangle$
$\neg_{10}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - b), 1 - b \rangle$
$\neg_{11}$	$\langle \text{sg}(b), \overline{\text{sg}}(b) \rangle$
$\neg_{12}$	$\langle b.(b + a), a.(b^2 + a + b.a) \rangle$
$\neg_{13}$	$\langle \text{sg}(1 - a), \overline{\text{sg}}(1 - a) \rangle$
$\neg_{14}$	$\langle \text{sg}(b), \overline{\text{sg}}(1 - a) \rangle$
$\neg_{15}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - b), \overline{\text{sg}}(1 - a) \rangle$
$\neg_{16}$	$\langle \overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(1 - a) \rangle$
$\neg_{17}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - b), \overline{\text{sg}}(b) \rangle$
$\neg_{18}$	$\langle b.\text{sg}(a), a.\text{sg}(b) \rangle$
$\neg_{19}$	$\langle b.\text{sg}(a), 0 \rangle$
$\neg_{20}$	$\langle b, 0 \rangle$

Някои различни импликации пораждат еднакви отрицания. Съответствието между отрицание и импликациите, които го генерират е показано в Таблица 1.3. Показани са съответствията само за първите 20 отрицания, пълният списък се намира в дисертацията.

Таблица 1.3. Съответствие между отрицания и импликации

$\neg_1$	$\rightarrow_1, \rightarrow_4, \rightarrow_5, \rightarrow_6, \rightarrow_7, \rightarrow_{10}, \rightarrow_{13}, \rightarrow_{61}, \rightarrow_{63}, \rightarrow_{64}, \rightarrow_{66}, \rightarrow_{67}, \rightarrow_{68},$ $\rightarrow_{69}, \rightarrow_{70}, \rightarrow_{71}, \rightarrow_{72}, \rightarrow_{73}, \rightarrow_{78}, \rightarrow_{80}, \rightarrow_{124}, \rightarrow_{125}, \rightarrow_{127}, \rightarrow_{166}$
$\neg_2$	$\rightarrow_2, \rightarrow_3, \rightarrow_8, \rightarrow_{11}, \rightarrow_{16}, \rightarrow_{20}, \rightarrow_{31}, \rightarrow_{32}, \rightarrow_{37}, \rightarrow_{40}, \rightarrow_{41}, \rightarrow_{42}$ $\rightarrow_{172}, \rightarrow_{173}, \rightarrow_{181}, \rightarrow_{182}, \rightarrow_{183}$
$\neg_3$	$\rightarrow_9, \rightarrow_{17}, \rightarrow_{21}$
$\neg_4$	$\rightarrow_{12}, \rightarrow_{18}, \rightarrow_{22}, \rightarrow_{46}, \rightarrow_{49}, \rightarrow_{50}, \rightarrow_{51}, \rightarrow_{53}, \rightarrow_{54}, \rightarrow_{91}, \rightarrow_{93}, \rightarrow_{94},$ $\rightarrow_{95}, \rightarrow_{96}, \rightarrow_{98}, \rightarrow_{134}, \rightarrow_{135}, \rightarrow_{137}, \rightarrow_{169}, \rightarrow_{170}, \rightarrow_{179}, \rightarrow_{180}$
$\neg_5$	$\rightarrow_{14}, \rightarrow_{15}, \rightarrow_{19}, \rightarrow_{23}, \rightarrow_{47}, \rightarrow_{48}, \rightarrow_{52}, \rightarrow_{55}, \rightarrow_{56}, \rightarrow_{57}, \rightarrow_{171}, \rightarrow_{174},$ $\rightarrow_{175}, \rightarrow_{184}, \rightarrow_{185}$
$\neg_6$	$\rightarrow_{24}, \rightarrow_{26}, \rightarrow_{27}, \rightarrow_{65}$
$\neg_7$	$\rightarrow_{25}, \rightarrow_{28}, \rightarrow_{29}, \rightarrow_{62}$
$\neg_8$	$\rightarrow_{30}, \rightarrow_{33}, \rightarrow_{34}, \rightarrow_{35}, \rightarrow_{36}, \rightarrow_{38}, \rightarrow_{39}, \rightarrow_{76}, \rightarrow_{82}, \rightarrow_{84}, \rightarrow_{85}, \rightarrow_{86},$ $\rightarrow_{87}, \rightarrow_{89}, \rightarrow_{129}, \rightarrow_{130}, \rightarrow_{132}, \rightarrow_{167}, \rightarrow_{168}, \rightarrow_{177}, \rightarrow_{178}$
$\neg_9$	$\rightarrow_{43}, \rightarrow_{44}, \rightarrow_{45}, \rightarrow_{83}$
$\neg_{10}$	$\rightarrow_{58}, \rightarrow_{59}, \rightarrow_{60}, \rightarrow_{92}$
$\neg_{11}$	$\rightarrow_{74}, \rightarrow_{97}$
$\neg_{12}$	$\rightarrow_{75}$
$\neg_{13}$	$\rightarrow_{77}, \rightarrow_{88}$
$\neg_{14}$	$\rightarrow_{79}$
$\neg_{15}$	$\rightarrow_{81}$
$\neg_{16}$	$\rightarrow_{90}$
$\neg_{17}$	$\rightarrow_{99}$
$\neg_{18}$	$\rightarrow_{100}$
$\neg_{19}$	$\rightarrow_{101}$
$\neg_{20}$	$\rightarrow_{102}, \rightarrow_{108}$

Глава 2

Интуиционистки размити конюнкции и дизюнкции

В тази глава е посочен частичен списък на двойките операции - конюнкции и дизюнкции, пресметнати по три групи от формули. Пълният списък е даден в дисертацията.

2.1 Конюнкции и дизюнкции от първи тип

Пресмятането на конюнкциите и дизюнкциите от първи тип, въз основа на дефинираните 185 импликации и породените от тях отрицания, се извършва чрез формулите (дефинирани в цитираната монография):

$$\langle a, b \rangle \vee \langle c, d \rangle = \neg \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle,$$

$$\langle a, b \rangle \wedge \langle c, d \rangle = \neg(\langle a, b \rangle \rightarrow \neg \langle c, d \rangle),$$

$$\neg \langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle.$$

Тук $\langle a, b \rangle$ и $\langle c, d \rangle$ са интуиционистки размити двойки, като в таблицата е записан резултата от прилагане на съответната дизюнкция и конюнкция:

$$\langle a, b \rangle \vee_{1,k} \langle c, d \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 185,$$

$$\langle a, b \rangle \wedge_{1,k} \langle c, d \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 185$$

Таблица 2.1. Списък на конюнкции и дизюнкции от първи тип

$\vee_{1,1}$	$\langle \min(a, c), \max(b, \min(a, d)) \rangle$
$\wedge_{1,1}$	$\langle \max(a, \min(b, c)), \min(b, d) \rangle$
$\vee_{1,2}$	$\langle \overline{\text{sg}}(\overline{\text{sg}}(a) - c), d.\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - c) \rangle$
$\wedge_{1,2}$	$\langle \overline{\text{sg}}(a - \overline{\text{sg}}(c)), \text{sg}(a - \overline{\text{sg}}(c)) \rangle$
$\vee_{1,3}$	$\langle 1 - (1 - c).\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - c), d.\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - c) \rangle$

(Продължава на следващата страница)

Таблица 2.1 (Продължава от предходната страница)

$\wedge_{1,3}$	$\langle \text{sg}(\text{sg}(c)\text{sg}(a - \overline{\text{sg}}(c))), \overline{\text{sg}}(\text{sg}(c)\text{sg}(a - \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$
$\vee_{1,4}$	$\langle \max(a, c), \min(b, d) \rangle$
$\wedge_{1,4}$	$\langle \min(a, c), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{1,5}$	$\langle \min(1, a + c), \max(0, b + d - 1) \rangle$
$\wedge_{1,5}$	$\langle \max(0, a + c - 1), \min(1, d + b) \rangle$
$\vee_{1,6}$	$\langle a + b.c, b.d \rangle$
$\wedge_{1,6}$	$\langle ac, b + ad \rangle$
$\vee_{1,7}$	$\langle \min(\max(a, b), \max(a, c), \max(c, d)), \max(\min(c, d) \min(d, b), \min(a, b)) \rangle$
$\wedge_{1,7}$	$\langle \max(\min(c, d) \min(a, c), \min(a, b)), \min(\max(a, b), \max(b, d), \max(c, d)) \rangle$
$\vee_{1,8}$	$\langle 1 - \min(1 - \min(\text{sg}(a), \text{sg}(c)), \text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c))), \min(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c)), \text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)), \text{sg}(\overline{\text{sg}}(c) - \text{sg}(a))) \rangle$
$\wedge_{1,8}$	$\langle \text{sg}((1 - \min(b, \overline{\text{sg}}(c)))\text{sg}(a - \overline{\text{sg}}(c))), \overline{\text{sg}}((1 - \min(b, \overline{\text{sg}}(c)))\text{sg}(a - \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$
$\vee_{1,9}$	$\langle ab + a^2 + b^2c, ab^2 + ba^2 + b^2d \rangle$
$\wedge_{1,9}$	$\langle ab + a^2(cd + c^2), (b + a^2d)(ab + a^2(cd + c^2)) + (b + a^2d)^2 \rangle$
$\vee_{1,10}$	$\langle \min(c, \overline{\text{sg}}(1 - b)) + \text{sg}(1 - b)(\overline{\text{sg}}(1 - c) + \min(a, \text{sg}(1 - c))), \min(d, \overline{\text{sg}}(1 - b)) + \min(b, \text{sg}(1 - b), \text{sg}(1 - c)) \rangle$
$\wedge_{1,10}$	$\langle c\overline{\text{sg}}(1 - a) + a\text{sg}(1 - a)\text{sg}(1 - d), d\overline{\text{sg}}(1 - a) + \text{sg}(1 - a)(\overline{\text{sg}}(1 - d) + b\text{sg}(1 - d)) \rangle$
$\vee_{1,11}$	$\langle c\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - c), d\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - c).\text{sg}(d - \text{sg}(a)) \rangle$
$\wedge_{1,11}$	$\langle \text{sg}(\text{sg}(c)\text{sg}(a - \overline{\text{sg}}(c))), \overline{\text{sg}}(\text{sg}(c)\text{sg}(a - \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$
$\vee_{1,12}$	$\langle \max(1 - b, c), 1 - \max(1 - b, c) \rangle$
$\wedge_{1,12}$	$\langle 1 - \max(b, d), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{1,13}$	$\langle a + c - ac, bd \rangle$
$\wedge_{1,13}$	$\langle b + d - bd, ac \rangle$
$\vee_{1,14}$	$\langle c\text{sg}(1 - c)\overline{\text{sg}}(1 - b) + \text{sg}(1 - b), d.\text{sg}(d).\text{sg}(1 - c).\overline{\text{sg}}(1 - b) \rangle$
$\wedge_{1,14}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - \text{sg}(1 - d)\text{sg}(\text{sg}(1 - d) - b)), \text{sg}(1 - \text{sg}(1 - d)\text{sg}(\text{sg}(1 - d) - b)) \rangle$
$\vee_{1,15}$	$\langle \overline{\text{sg}}(d - b) + c.\text{sg}(d - b), d.\text{sg}(d - b) \rangle$
$\wedge_{1,15}$	$\langle \text{sg}((1 - \max(a, \text{sg}(1 - d)))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a - \overline{\text{sg}}(1 - d)))), \overline{\text{sg}}((1 - \max(a, \text{sg}(1 - d)))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a - \overline{\text{sg}}(1 - d)))) \rangle$
$\vee_{1,16}$	$\langle \max(\text{sg}(a), c), \min(\overline{\text{sg}}(a), d) \rangle$
$\wedge_{1,16}$	$\langle \overline{\text{sg}}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))), \text{sg}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$
$\vee_{1,17}$	$\langle \max(a^2 + ab, c), \min((ab + a^2)b + b^2, d) \rangle$
$\wedge_{1,17}$	$\langle \min(ab + a^2, cd + c^2), \max(b, d) \min(ab + a^2, cd + c^2) + \max(b, d)^2 \rangle$
$\vee_{1,18}$	$\langle \max(1 - b, c), \min(b, d) \rangle$
$\wedge_{1,18}$	$\langle 1 - \max(b, d), \max(b, d) \rangle$

(Продължава на следващата страница)

Таблица 2.1 (Продължава от предходната страница)

$\vee_{1,19}$	$\langle \max(\text{sg}(1-b), c), \min(\overline{\text{sg}}(1-b), d) \rangle$
$\wedge_{1,19}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - \min(\text{sg}(1-b), \text{sg}(1-d))),$ $\text{sg}(1 - \min(\text{sg}(1-b), \text{sg}(1-d))) \rangle$
$\vee_{1,20}$	$\langle \max(\text{sg}(a), \text{sg}(c)), \min(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c)) \rangle$
$\wedge_{1,20}$	$\langle \overline{\text{sg}}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))), \text{sg}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$

2.2 Конюнкции и дизюнкции от втори тип

Пресмятането на конюнкциите и дизюнкциите от втори тип, въз основа на дефинираните 185 импликации и породените от тях отрицания, се извършва чрез формулите:

$$\begin{aligned}
\langle a, b \rangle \vee \langle c, d \rangle &= \neg \langle a, b \rangle \rightarrow \neg \neg \langle c, d \rangle, \\
\langle a, b \rangle \wedge \langle c, d \rangle &= \neg(\neg \neg \langle a, b \rangle \rightarrow \neg \langle c, d \rangle), \\
\neg \langle a, b \rangle &= \langle a, b \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle.
\end{aligned}$$

Таблица 2.2. Списък на конюнкции и дизюнкции от втори тип

$\vee_{2,1}$	$\langle \max(a, \min(b, c)), \min(b, d) \rangle$
$\wedge_{2,1}$	$\langle \min(a, c), \max(b, \min(a, d)) \rangle$
$\vee_{2,2}$	$\langle \overline{\text{sg}}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)), \overline{\text{sg}}(c) \text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)) \rangle;$
$\wedge_{2,2}$	$\langle \text{sg}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c)), \overline{\text{sg}}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c)) \rangle;$
$\vee_{2,3}$	$\langle 1 - \overline{\text{sg}}(c) \text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)), \overline{\text{sg}}(c) \text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)) \rangle;$
$\wedge_{2,3}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - \text{sg}(c) \text{sg}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c))),$ $\text{sg}(1 - \text{sg}(c) \text{sg}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$
$\vee_{2,4}$	$\langle \max(a, c), \min(b, d) \rangle$
$\wedge_{2,4}$	$\langle \min(a, c), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{2,5}$	$\langle \min(1, a + c), \max(0, b + d - 1) \rangle$
$\wedge_{2,5}$	$\langle \max(0, a + c - 1), \min(1, d + b) \rangle$
$\vee_{2,6}$	$\langle a + b.c, b.d \rangle$
$\wedge_{2,6}$	$\langle ac, b + ad \rangle$
$\vee_{2,7}$	$\langle \min(\max(a, b), \max(a, c), \max(c, d)),$ $\max(\min(c, d) \min(d, b), \min(a, b)) \rangle$
$\wedge_{2,7}$	$\langle \max(\min(c, d) \min(a, c), \min(a, b)),$ $\min(\max(a, b), \max(b, d), \max(c, d)) \rangle$
$\vee_{2,8}$	$\langle 1 - (1 - \min(\text{sg}(a), \text{sg}(c))) \text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)),$ $\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c)) \text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)) \text{sg}(\overline{\text{sg}}(c) - \text{sg}(a)) \rangle$
$\wedge_{2,8}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - (1 - \min(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))) \text{sg}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c))),$ $\text{sg}(1 - (1 - \min(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))) \text{sg}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c))) \rangle;$

(Продължава на следващата страница)

Таблица 2.2 (Продължава от предходната страница)

$\vee_{2,9}$	$\langle ab + a^2 + b^2c(c + d),$ $ab^2 + ba^2 + b^2d(cd + c^2 + d) \rangle;$
$\wedge_{2,9}$	$\langle (ab + a^2)(b^2 + a^2b + ab^2 + (a^2 + ab)(cd + c^2)),$ $(b^2 + a^2b + ab^2 + (ab + a^2)^2d)^2$ $+ (b^2 + a^2b + ab^2 + (ab + a^2)^2d)(ab + a^2)$ $\cdot (b^2 + a^2b + ab^2 + (a^2 + ab)(cd + c^2)) \rangle$
$\vee_{2,10}$	$\langle \min(c, \overline{\text{sg}}(1 - b)) + \text{sg}(1 - b)(\overline{\text{sg}}(1 - c) + \min(a, \text{sg}(1 - c))),$ $\min(d, \overline{\text{sg}}(1 - b)) + \min(b, \text{sg}(1 - b), \text{sg}(1 - c)) \rangle$
$\wedge_{2,10}$	$\langle c.\overline{\text{sg}}(1 - a) + a.\text{sg}(1 - a).\text{sg}(1 - d),$ $d\overline{\text{sg}}(1 - a) + \text{sg}(1 - a).(\overline{\text{sg}}(1 - d) + b.\text{sg}(1 - d)) \rangle$
$\vee_{2,11}$	$\langle 1 - \overline{\text{sg}}(c)\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c)),$ $\overline{\text{sg}}(c)\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a) - \text{sg}(c))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(c) - \text{sg}(a)) \rangle$
$\wedge_{2,11}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - \text{sg}(c)\text{sg}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c))),$ $\text{sg}(1 - \text{sg}(c)\text{sg}(\text{sg}(a) - \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$
$\vee_{2,12}$	$\langle \max(1 - b, 1 - d), 1 - \max(1 - b, 1 - d) \rangle$
$\wedge_{2,12}$	$\langle 1 - \max(b, d), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{2,13}$	$\langle a + c - ac, bd \rangle$
$\wedge_{2,13}$	$\langle ac, b + d - bd \rangle$
$\vee_{2,14}$	$\langle 1 - (1 - \text{sg}(1 - d))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(1 - b) - \text{sg}(1 - d))$ $-\overline{\text{sg}}(1 - d)\overline{\text{sg}}(\overline{\text{sg}}(1 - b) - \text{sg}(1 - d))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(1 - d) - \text{sg}(1 - b)),$ $\overline{\text{sg}}(1 - d)\text{sg}(\overline{\text{sg}}(1 - d) - \text{sg}(1 - b)) \rangle$
$\wedge_{2,14}$	$\langle \overline{\text{sg}}(1 - \text{sg}(1 - d)\text{sg}(\text{sg}(1 - d) - \overline{\text{sg}}(1 - b))),$ $\text{sg}(1 - \text{sg}(1 - d)\text{sg}(\text{sg}(1 - d) - \overline{\text{sg}}(1 - b))) \rangle;$
$\vee_{2,15}$	$\langle 1 - (1 - \min(\text{sg}(1 - b), \text{sg}(1 - d)))\text{sg}(\text{sg}(\overline{\text{sg}}(1 - b)$ $-\text{sg}(1 - d)) + \text{sg}(\overline{\text{sg}}(1 - d) - \text{sg}(1 - b)))$ $-\min(\text{sg}(1 - b), \text{sg}(1 - d))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(1 - b) - \text{sg}(1 - d))$ $\text{sg}(\overline{\text{sg}}(1 - d) - \text{sg}(1 - b)), 1 - (1 - \max(\overline{\text{sg}}(1 - b),$ $\overline{\text{sg}}(1 - d)))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(\overline{\text{sg}}(1 - b) - \text{sg}(1 - d))$ $+ \overline{\text{sg}}(\overline{\text{sg}}(1 - d) - \text{sg}(1 - b))) - \max(\overline{\text{sg}}(1 - b),$ $\overline{\text{sg}}(1 - d))\overline{\text{sg}}(\overline{\text{sg}}(1 - b) - \text{sg}(1 - d))\overline{\text{sg}}(\overline{\text{sg}}(1 - d) - \text{sg}(1 - b)) \rangle$
$\wedge_{2,15}$	$\langle \overline{\text{sg}}((1 - \max(\text{sg}(1 - b), \text{sg}(1 - d)))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(\text{sg}(1 - b) - \overline{\text{sg}}(1 - d))$ $+ \overline{\text{sg}}(\text{sg}(1 - d) - \overline{\text{sg}}(1 - b))) + \max(\text{sg}(1 - b),$ $\text{sg}(1 - d))\overline{\text{sg}}(\text{sg}(1 - b) - \overline{\text{sg}}(1 - d))\overline{\text{sg}}(\text{sg}(1 - d) - \overline{\text{sg}}(1 - b))) \rangle$
$\vee_{2,16}$	$\langle \max(\text{sg}(a), \text{sg}(c)), \min(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c)) \rangle$
$\wedge_{2,16}$	$\langle \overline{\text{sg}}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))), \text{sg}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$
$\vee_{2,17}$	$\langle \max(a^2 + ab, c(c + d)),$ $\min((ab + a^2)b + b^2, d(cd + c^2 + d)) \rangle$
$\wedge_{2,17}$	$\langle \min((ab + a^2)((ab + a^2)b + b^2) + (ab + a^2)^2, c^2 + cd),$ $\max(b^2 + b(a^2 + ab), d)^2 + \max(b^2 + b(a^2 + ab),$ $d) \min((ab + a^2)((ab + a^2)b + b^2)$ $+ (ab + a^2)^2, c^2 + cd) \rangle$
$\vee_{2,18}$	$\langle \max(1 - b, 1 - d), \min(b, d) \rangle$

(Продължава на следващата страница)

Таблица 2.2 (Продължава от предходната страница)

$\wedge_{2,18}$	$\langle 1 - \max(b, d), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{2,19}$	$\langle \max(\text{os}(\overline{\text{sg}}(1 - b) + \overline{\text{sg}}(1 - b)), \overline{\text{sg}}(d)), \min(\overline{\text{sg}}(1 - b), \text{sg}(d)) \rangle$
$\wedge_{2,19}$	$\langle \overline{\text{sg}}(\min(\text{sg}(1 - \text{sg}(1 - b)), \text{sg}(1 - d))),$ $\text{sg}(\min(\text{sg}(1 - \text{sg}(1 - b)), \text{sg}(1 - d))) \rangle$
$\vee_{2,20}$	$\langle \max(\text{sg}(a), \text{sg}(c)), \min(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c)) \rangle$
$\wedge_{2,20}$	$\langle \overline{\text{sg}}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))), \text{sg}(\max(\overline{\text{sg}}(a), \overline{\text{sg}}(c))) \rangle$

2.3 Конюнкции и дизюнкции от трети тип

Пресмятането на конюнкциите и дизюнкциите от трети тип, въз основа на дефинираните 185 импликации и породените от тях отрицания, се извършва чрез формулите:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle \vee \langle c, d \rangle &= \neg \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle \\ \langle a, b \rangle \wedge \langle c, d \rangle &= \neg(\langle a, b \rangle \rightarrow \neg \langle c, d \rangle) \\ \neg \langle a, b \rangle &= \langle b, a \rangle\end{aligned}$$

Таблица 2.3. Списък на конюнкции и дизюнкции от трети тип

$\vee_{3,1}$	$\langle \max(a, \min(b, c)), \min(b, d) \rangle$
$\wedge_{3,1}$	$\langle \min(a, c), \max(b, \min(a, d)) \rangle$
$\vee_{3,2}$	$\langle \overline{\text{sg}}(b - c), \text{dsg}(b - c) \rangle$
$\wedge_{3,2}$	$\langle \text{dsg}(a - d), \overline{\text{sg}}(a - d) \rangle$
$\vee_{3,3}$	$\langle 1 - (1 - c)\text{sg}(b - c), \text{dsg}(b - c) \rangle$
$\wedge_{3,3}$	$\langle \text{csg}(a - d), 1 - (1 - d)\text{sg}(a - d) \rangle$
$\vee_{3,4}$	$\langle \max(a, c), \min(b, d) \rangle$
$\wedge_{3,4}$	$\langle \min(a, c), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{3,5}$	$\langle \min(1, a + c), \max(0, b + d - 1) \rangle$
$\wedge_{3,5}$	$\langle \max(0, a + c - 1), \min(1, d + b) \rangle$
$\vee_{3,6}$	$\langle a + bc, bd \rangle$
$\wedge_{3,6}$	$\langle ac, b + ad \rangle$
$\vee_{3,7}$	$\langle \min(\max(a, b), \max(a, c), \max(c, d)),$ $\max(\min(c, d) \min(d, b), \min(a, b)) \rangle$
$\wedge_{3,7}$	$\langle \max(\min(c, d) \min(a, c), \min(a, b)),$ $\min(\max(a, b), \max(b, d), \max(c, d)) \rangle$
$\vee_{3,8}$	$\langle 1 - (1 - \min(a, c))\text{sg}(b - c), \max(b, d)\text{sg}(b - c)\text{sg}(d - a) \rangle$
$\wedge_{3,8}$	$\langle \max(a, c)\text{sg}(a - d)\text{sg}(c - b), 1 - (1 - \min(b, d))\text{sg}(a - d) \rangle$
$\vee_{3,9}$	$\langle a + b^2c, ab + b^2d \rangle$
$\wedge_{3,9}$	$\langle ab + a^2c, b + a^2d \rangle$

(Продължава на следващата страница)

Таблица 2.3 (Продължава от предходната страница)

$\vee_{3,10}$	$\langle \min(c, \overline{\text{sg}}(1-b)) + \text{sg}(1-b)(\overline{\text{sg}}(1-c) + \min(a, \text{sg}(1-c))),$ $\min(d, \overline{\text{sg}}(1-b)) + \min(b, \text{sg}(1-b), \text{sg}(1-c)) \rangle$
$\wedge_{3,10}$	$\langle c\overline{\text{sg}}(1-a) + a\text{sg}(1-a)\text{sg}(1-d),$ $d\overline{\text{sg}}(1-a) + \text{sg}(1-a)(\overline{\text{sg}}(1-d) + b\text{sg}(1-d)) \rangle$
$\vee_{3,11}$	$\langle 1 - (1-c)\text{sg}(b-c), d\text{sg}(b-c)\text{sg}(d-a) \rangle$
$\wedge_{3,11}$	$\langle c\text{sg}(a-d)\text{sg}(c-b), 1 - (1-d)\text{sg}(a-d) \rangle$
$\vee_{3,12}$	$\langle \max(a, c), 1 - \max(a, c) \rangle$
$\wedge_{3,12}$	$\langle 1 - \max(b, d), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{3,13}$	$\langle a + c - ac, bd \rangle$
$\wedge_{3,13}$	$\langle ac, b + d - bd \rangle$
$\vee_{3,14}$	$\langle 1 - (1-c)\text{sg}(b-c) - d\overline{\text{sg}}(b-c)\text{sg}(d-a), d\text{sg}(d-a) \rangle$
$\wedge_{3,14}$	$\langle c\text{sg}(c-b), 1 - (1-d)\text{sg}(a-d) - c\overline{\text{sg}}(a-d)\text{sg}(c-b) \rangle$
$\vee_{3,15}$	$\langle 1 - (1 - \min(a, c))\text{sg}(\text{sg}(b-c) + \text{sg}(d-a))$ $- \min(a, c)\text{sg}(b-c)\text{sg}(d-a), 1 - (1 - \max(b, d))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(b-c)$ $+ \overline{\text{sg}}(d-a)) - \max(b, d)\overline{\text{sg}}(b-c)\overline{\text{sg}}(d-a) \rangle$
$\wedge_{3,15}$	$\langle 1 - (1 - \max(a, c))\text{sg}(\overline{\text{sg}}(a-d)$ $+ \overline{\text{sg}}(c-b)) - \max(a, c)\overline{\text{sg}}(a-d)\overline{\text{sg}}(c-b),$ $1 - (1 - \min(b, d))\text{sg}(\text{sg}(a-d) + \text{sg}(c-b))$ $- \min(b, d)\text{sg}(a-d)\text{sg}(c-b) \rangle$
$\vee_{3,16}$	$\langle \max(\overline{\text{sg}}(b), c), \min(\text{sg}(b), d) \rangle$
$\wedge_{3,16}$	$\langle \min(\text{sg}(a), c), \max(\overline{\text{sg}}(a), d) \rangle$
$\vee_{3,17}$	$\langle \max(a, c), \min(ab + b^2, d) \rangle$
$\wedge_{3,17}$	$\langle \min(ab + a^2, c), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{3,18}$	$\langle \max(a, c), \min(1-a, d) \rangle$
$\wedge_{3,18}$	$\langle \min(1-b, c), \max(b, d) \rangle$
$\vee_{3,19}$	$\langle \max(1 - \text{sg}(\text{sg}(b) + \text{sg}(1-a)), c), \min(\text{sg}(1-a), d) \rangle$
$\wedge_{3,19}$	$\langle \min(\text{sg}(1-b), c), \max(1 - \text{sg}(\text{sg}(a) + \text{sg}(1-b)), d) \rangle$
$\vee_{3,20}$	$\langle \max(\overline{\text{sg}}(b), \text{sg}(c)), \min(\text{sg}(b), \overline{\text{sg}}(c)) \rangle$
$\wedge_{3,20}$	$\langle \min(\text{sg}(a), \overline{\text{sg}}(d)), \max(\overline{\text{sg}}(a), \text{sg}(d)) \rangle$

Глава 3

Свойства на интуиционистки размитите конюнкции и дизюнкции

3.1 Структура на решетка върху множеството на интуиционистки размитите двойки

Множеството L на интуиционистки размитите двойки е частично наредено относно релацията дефинирана чрез: $\langle a, b \rangle \leq_L \langle c, d \rangle$, при $a \leq_{\mathbb{R}} c$, $b \geq_{\mathbb{R}} d$. Ако последните две неравенства са строги, то ще използваме означението $<_L$ или просто $<$.

Дефиниция 3.1. Частично нареденото множество $\mathcal{L}$ снабдено с две бинарни операции $\vee$, $\wedge$ е решетка, ако удовлетворява следните тъждества $\forall x, y \in \mathcal{L}$:

- 1) идемпотентност $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$
- 2) комутативност $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$
- 3) асоциативност $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
- 4) поглъщане $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$
- 5) съгласуваност $x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$.

Означение за решетка: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\leq, \wedge, \vee)$.

Дефиниция 3.2. Решетката $\mathcal{L}(\leq, \wedge, \vee)$ е модуллярна, ако от $x \leq z$ следва $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, $x, y, z \in \mathcal{L}$

Дефиниция 3.3. Решетката $\mathcal{L}(\leq, \wedge, \vee)$ е дистрибутивна, ако $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{L}$.

Дефиниция 3.4. Решетката $\mathcal{L}(\leq, \vee, \wedge)$ е ограничена, ако притежава минимален и максимален елемент относно $\leq$.

Дефиниция 3.5. Ограничената дистрибутивна решетка $\mathcal{L}(\leq, \vee, \wedge)$ се нарича алгебра на Хейтинг, ако в $\mathcal{L}$ е въведена трета бинарна операция, означена със $\rightarrow$, за която е в сила:

$$(x \wedge y) \leq z \text{ тогава и само тогава, когато } x \leq (y \rightarrow z).$$

Означение за алгебра на Хейтинг: $\mathcal{L}(\leq, \vee, \wedge, \rightarrow)$.

Всяко изображение $L \times L \rightarrow L$ ще наричаме импликация, където L е множеството на интуиционистки размитите двойки. Ако $\rightarrow$ е фиксирана импликация и $x, y, z \in L$ са такива, че $(x \rightarrow y) = z$, последното равенство ще записваме чрез $F(x, y) = z$ или покомпонентно: $\langle F_1(x, y), F_2(x, y) \rangle = z$, $F = \langle F_1, F_2 \rangle$. Целта ни ще бъде да определим всички импликации, които снабдяват L със структура на решетка относно породените двойки конюнкции и дизюнкции въз основа на трите групи от формули:

-първа група (отрицанията са породени от съответните импликации)-

$$x \vee y = \neg x \rightarrow y$$

$$x \wedge y = \neg(x \rightarrow \neg y)$$

-втора група (отрицанията са породени от съответните импликации)-

$$x \vee y = \neg x \rightarrow \neg \neg y$$

$$x \wedge y = \neg(\neg \neg x \rightarrow \neg y)$$

-трета група от формули-

$$x \vee y = \neg x \rightarrow y$$

$$x \wedge y = \neg(x \rightarrow \neg y)$$

$$\neg \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle.$$

На всяка от 185-те импликации се съпоставят три двойки конюнкции и дизюнкции, които означаваме чрез $(\wedge_{k,l}, \vee_{k,l})$, $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, \dots, 185$. Въпросът е кога $L(\leq, \wedge_{k,l}, \vee_{k,l})$ е решетка? Тоест, за кои k, l се получава решетка, в кои случаи тя е дистрибутивна. Кога $L(\leq, \wedge_{k,l}, \vee_{k,l}, \rightarrow_l)$, $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, \dots, 185$ е алгебра на Хейтинг? По-долу доказваме, че в трите случая ($k = 1, 2, 3$), съществува единствена импликация задаваща структура на решетка върху множеството на интуиционистки размитите двойки. Тази импликация е $\rightarrow_4$ от списъка в глава 1.

Теорема 3.1.1. *Съществува единствена импликация, която снабдява множеството на интуиционистки размитите двойки със структура на решетка. Тази импликация има вида $F(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) = \langle \max(a, c), \min(b, d) \rangle$. Съответната решетка е дистрибутивна, но не е алгебра на Хейтинг.*

Доказваме, че измежду всички импликации в L (тоест разглеждаме всички бинарни операции в L , а не само дефинираните 185) и всички отрицания в L (разглеждаме всички унарни операции в L , а не само дефинираните 54), съществува единствена импликация задаваща структура на решетка върху частично нареденото множество L . Този резултат е формулиран като теорема 3.2.1.

3.2 Структура на решетка в общия случай

Нека двойката (F, θ) задава структура на решетка върху $L(\leq)$ чрез формулите:

$$x \vee y = F(\theta^p x, \theta^q y) \text{ и } x \wedge y = \theta^r F(\theta^s x, \theta^t y), \quad \forall x, y \in L,$$

където p, q, r, s, t са цели неотрицателни числа. В частност при $p = r = t = 1$, $q = s = 2$ получаваме втората група от формули, а при $p = r = t = 1$, $q = s = 0$ получаваме първа и трета група от формули. При тези по-обща предположения доказваме теорема 3.2.1, която обобщава 3.1.1. Този подход обяснява защо структурата на решетка върху $L(\leq)$ (т.е. двойката бинарни операции $\vee$, $\wedge$, удовлетворяващи аксиоми 1,2,3,4 и 5, е единствена и не зависи от това коя група от формули използваме, и дори от това какви групи от формули бихме дефинирали. Понеже (F, θ) задава структура на решетка върху $L(\leq)$, то в сила равенствата $(\forall x, y \in L)$:

идемпотентност

$$F(\theta^p x, \theta^q x) = x, \quad \text{и} \quad \theta^r F(\theta^s x, \theta^t x) = x.$$

комутативност

$$F(\theta^p x, \theta^q y) = F(\theta^p y, \theta^q x) \text{ и } \theta^r F(\theta^s x, \theta^t y) = \theta^r F(\theta^s y, \theta^t x).$$

асоциативност

$$\begin{aligned} F(\theta^p F(\theta^p x, \theta^q y), \theta^q z) &= F(\theta^p x, \theta^q F(\theta^p y, \theta^q z)), \\ \theta^r F(\theta^{r+s} F(\theta^s x, \theta^t y), \theta^t z) &= \theta^r F(\theta^s x, \theta^{r+t} F(\theta^s y, \theta^t z)). \end{aligned}$$

поглъщане

$$F(\theta^p x, \theta^{q+r} F(\theta^s x, \theta^t y)) = x, \quad \text{и} \quad \theta^r F(\theta^s x, \theta^t F(\theta^p x, \theta^q y)) = x.$$

съгласуваност

$$x \leq y \Leftrightarrow F(\theta^p x, \theta^q y) = y \Leftrightarrow \theta^r F(\theta^s x, \theta^t y) = x.$$

Теорема 3.2.1. *Съществува единствена структура на решетка върху частично нареденото множество $L(\leq)$.*

3.3 Алгебрически свойства на интуиционистки размитите конюнкции и дизюнкции от първи и трети тип

Нека $x, y, z \in L(\leq)$ са произволни интуиционистки размити двойки. Да разгледаме следната група от аксиоми:

Дефиниция 3.6. Аксиоми за решетка:

- 1 $x \vee x = x$,
- 2 $x \wedge x = x$,
- 3 $x \vee y = y \vee x$,
- 4 $x \wedge y = y \wedge x$,
- 5 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
- 6 $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
- 7 $x \vee (x \wedge y) = x$,
- 8 $x \wedge (x \vee y) = x$,
- 9 $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$;

Аксиома за модуллярност на решетка:

- 10 От $x \leq z$ да следва $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$;

Аксиома за дистрибутивност на решетка:

- 11 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

Аксиома за алгебра на Хейтинг:

- 12 $((x \wedge y) \leq z)$ и $(x \leq (y \rightarrow z))$ или $((x \wedge y) > z)$ и $(x > (y \rightarrow z))$,

Свойства на алгебрата на Хейтинг:

- 13 $(x \rightarrow x) = \langle 1, 0 \rangle$,
- 14 $y \leq (x \rightarrow y)$,
- 15 $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$,
- 16 $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,
- 17 $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$,

Модификации на основни логически аксиоми:

- 18 $x \rightarrow (y \wedge x) = x \rightarrow y$,
- 19 $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$,
- 20 $\neg\neg x \vee \neg\neg y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$,
- 21 $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$,
- 22 $\neg\neg x \wedge \neg\neg y = \neg(\neg x \vee \neg y)$,
- 23 $x \vee \neg x = \langle 1, 0 \rangle$,
- 24 $\neg\neg x \vee \neg x = \langle 1, 0 \rangle$,

Закони на де Морган и обобщения:

- 25 $(\neg x) \wedge (\neg y) = \neg(x \vee y)$,

- 26 $(\neg x) \vee (\neg y) = \neg(x \wedge y),$
 27 $\neg((\neg x) \vee (\neg y)) = (x \wedge y),$
 28 $\neg((\neg x) \wedge (\neg y)) = (x \vee y),$
 29 $\neg(\neg x \vee \neg y) = (\neg\neg x) \wedge (\neg\neg y),$
 30 $\neg(\neg x \wedge \neg y) = (\neg\neg x) \vee (\neg\neg y).$

В този раздел ще проверим за всяка от изброените аксиоми, кои са конюнкциите и дизюнкциите от първи и трети тип, които ги удовлетворяват. Разглеждаме всичките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}, \wedge_{3,l}, \vee_{3,l}, l = 1, 2, \dots, 185$, от първи и трети тип.

Теорема 3.3.1. *Аксиома 1 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{1,l}$ с номера: $l = 1, 4, 7, 10, 61, 67, 72, 73, 78, 80, 166$.*

Теорема 3.3.2. *Аксиома 1 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{3,l}$ с номера: $l = 1, 4, 7, 18, 19, 26, 28, 61, 67, 72, 73, 78, 80, 139, 140, 141, 166$.*

Теорема 3.3.3. *Аксиома 2 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{1,l}$ с номера: $l = 1, 4, 7, 10, 61, 67, 72, 73, 78, 80, 166$.*

Теорема 3.3.4. *Аксиома 2 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{3,l}$ с номера: $l = 1, 4, 7, 18, 19, 26, 28, 61, 67, 72, 73, 78, 80, 139, 140, 141, 166$.*

Теорема 3.3.5. *Аксиома 3 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{1,l}$ с номера: $l = 4, 5, 7, 13, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 74, 76, 77, 79, 111, 182, 185$.*

Теорема 3.3.6. *Аксиома 3 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{3,l}$ с номера: $l = 4, 5, 7, 12, 13, 15, 24, 25, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 43, 49, 50, 51, 52, 55, 58, 101, 104, 107, 139, 140, 141, 142, 145, 146, 149, 151, 152, 153, 155, 156, 159, 161, 163, 165, 176, 178, 179, 183, 184$.*

Теорема 3.3.7. *Аксиома 4 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{1,l}$ с номера: $l = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 55, 56, 57, 74, 76, 77, 79, 81, 83, 88, 91, 97, 98, 100, 101, 102, 107, 110, 112, 130, 132, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185$.*

Теорема 3.3.8. *Аксиома 4 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{3,l}$ с номера: $l = 4, 5, 7, 12, 13, 15, 24, 25, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 43, 49, 50, 51, 52, 55, 58, 101, 104, 107, 139, 140, 141, 142, 145, 146, 149, 151, 152, 153, 155, 156, 159, 161, 163, 165, 176, 178, 179, 183, 184$.*

Теорема 3.3.9. *Аксиома 5 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{1,l}$ с номера: $l = 1, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 61, 64, 67, 70, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 107, 108, 166, 170, 171, 172, 174, 182, 185$.*

Теорема 3.3.10. *Аксиома 5 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{3,l}$ с номера: $l = 1, 4, 5, 6, 10, 12, 13, 16, 18, 19, 25, 26, 28, 29, 33, 34, 45, 46, 49, 51, 54, 56, 61, 64, 67, 70, 72, 73, 78, 80, 81, 86, 87, 95, 96, 166, 168, 171, 173, 175, 181, 183, 184$.*

Теорема 3.3.11. Аксиома 6 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{1,l}$ с номера: $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 67, 70, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 95, 96, 97, 98, 100, 101, 102, 104, 105, 107, 129, 130, 132, 166, 167, 168, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185$.

Теорема 3.3.12. Аксиома 6 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{3,l}$ с номера: $l = 1, 4, 5, 6, 10, 12, 13, 16, 18, 19, 25, 26, 28, 29, 33, 34, 45, 46, 49, 41, 43, 49, 50, 51, 54, 56, 61, 64, 67, 70, 72, 73, 78, 80, 81, 86, 87, 95, 96, 166, 168, 171, 173, 175, 181, 183, 184$.

Теорема 3.3.13. Аксиома 7 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{1,l}$ с номера: $l = 1, 4, 10, 72, 73, 78, 80, 166$.

Теорема 3.3.14. Аксиома 7 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{3,l}$ с номера: $l = 1, 4, 10, 72, 73, 78, 80, 166$.

Теорема 3.3.15. Аксиома 8 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{1,l}$ с номера: $l = 1, 4, 10, 72, 73, 78, 80, 166$.

Теорема 3.3.16. Аксиома 8 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{3,l}$ с номера: $l = 1, 4, 10, 72, 73, 78, 80, 166$.

Теорема 3.3.17. Аксиома 9 се удовлетворява само от четвъртата конюнкция и дизюнкция.

Теорема 3.3.18. Аксиома 10 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}$ с номера: $l = 3, 4, 7, 11, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 81, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 166, 167, 169, 170, 171, 172, 174$.

Теорема 3.3.19. Аксиома 10 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{3,l}, \vee_{3,l}$ с номера: $l = 4, 7, 18, 19, 20, 22, 23, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 166, 170, 174$.

Теорема 3.3.20. Аксиома 11 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}$ с номера: $l = 3, 4, 10, 11, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 74, 76, 77, 79, 81, 101, 102, 104, 105, 166, 170, 171, 172, 174$.

Теорема 3.3.21. Аксиома 11 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{3,l}, \vee_{3,l}$ с номера: $l = 4, 10, 16, 18, 19, 27, 81, 139, 171$.

Теорема 3.3.22. Аксиома 12 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{1,l}$ с номера: $l = 49, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 167, 169, 184$.

Теорема 3.3.23. Аксиома 12 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{3,l}$ с номера: $l = 49, 184$.

Теорема 3.3.24. Аксиома 15 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{1,l}$ с номера: $l = 3, 11, 14, 16, 19, 20, 23, 74, 77, 101, 102, 104, 105, 109, 166, 167, 170, 171, 172, 174$.

Теорема 3.3.25. Аксиома 15 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{3,l}$ с номера: $l = 16, 19, 109, 166, 171$.

Теорема 3.3.26. Аксиома 16 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{1,l}$ с номера: $l = 3, 4, 10, 11, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 26, 27, 74, 76, 77, 79, 81, 166, 170, 171, 172, 174$.

Теорема 3.3.27. Аксиома 16 се удовлетворява от конюнкции $\wedge_{3,l}$ с номера: $l = 4, 10, 16, 18, 19, 26, 81, 139, 166, 171$.

Теорема 3.3.28. Аксиома 17 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}$ с номера: $l = 4, 20, 22, 23, 27, 29, 67, 70, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79$.

Теорема 3.3.29. Аксиома 17 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{3,l}, \vee_{3,l}$ с номера: $l = 4, 29, 67, 70, 72, 73, 79, 139$.

Теорема 3.3.30. Аксиома 19 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}$ с номера: $l = 1, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 20, 22, 23, 27, 29, 61, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 124, 125, 127, 166, 170, 182, 185$.

Теорема 3.3.31. Аксиома 19 се удовлетворява от всички двойки конюнкции и дизюнкции от трети тип.

Теорема 3.3.32. Аксиома 20 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}$ с номера: $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, [47, 74], [76, 81], [83, 88], 90, [92, 97], 99, 101, 102, 104, 105, 107, 108, 124, 125, 127, 166, 168, [170, 185]$.

Теорема 3.3.33. Аксиома 20 се удовлетворява от всички двойки конюнкции и дизюнкции от трети тип.

Теорема 3.3.34. Аксиома 21 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}$ с номера: $l = [1, 8], [10, 16], [18, 20], [22, 61], [63, 74], [76, 82], [84, 106], [114, 118], 124, 125, 127, 129, 130, 132, 134, 135, 137, [166, 180], [182, 185]$.

Теорема 3.3.35. Аксиома 21 се удовлетворява от всички двойки конюнкции и дизюнкции от трети тип.

Теорема 3.3.36. Аксиома 22 се удовлетворява от двойките конюнкции и дизюнкции $\wedge_{1,l}, \vee_{1,l}$ с номера: $l = [1, 8], [10, 16], [18, 20], [22, 43], [45, 61], [63, 74], [76, 89], [91, 98], [100, 107], [114, 118], 124, 125, 127, 129, 130, 132, 134, 135, 137, 166, 167, 168, [170, 180], [182, 185]$.

Теорема 3.3.37. Аксиома 22 се удовлетворява от всички двойки конюнкции и дизюнкции от трети тип.

Теорема 3.3.38. Аксиома 23 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{1,l}$ с номера: $l = 2, 3, 8, 11, 14, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 31, 32, 34, 37, [40, 45], 47, 48, 49, 52, 55, 56, 57, 62, 63, 65, 68, 69, 74, 77, 83, 84, 88, 90, 93, [171, 185]$.

Теорема 3.3.39. *Аксиома 23 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{3,l}$ с номера: $l = 2, 3, 8, 11, 14, 15, 19, 23, 24, 32, 34, 37, 40, 42, 62, 63, 65, 68, 69, 74, 77, 88, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 185$.*

Теорема 3.3.40. *Аксиома 24 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{1,l}$ с номера: $l = 2, 3, 8, 11, 14, 15, 19, 23, 24, 32, 34, 37, 40, 42, 63, 65, 68, 69, 74, 77, 88, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 185$.*

Теорема 3.3.41. *Аксиома 24 се удовлетворява от дизюнкции $\vee_{3,l}$ с номера: $l = 2, 3, 8, 11, 14, 15, 19, 23, 24, 32, 34, 37, 40, 42, 62, 63, 65, 68, 69, 74, 77, 88, 176, 177, 178, 180, 181, 182, 183, 185$.*

Теорема 3.3.42. *Аксиома 25,26,27,28,29,30 се удовлетворява от всички конюнкции и дизюнкции от трети тип.*

Глава 4

Приложение на получените резултати

Интуиционистки размита двойка (ИРД) е наредена двойка $\langle a, b \rangle$ от реални неотрицателни числа, със сума ненадминаваща 1. Компонентите на наредената двойка се интерпретират като степени на принадлежност и непринадлежност, или степен на коректност и некоректност.

Нека фиксираме две интуиционистки размити двойки $x = \langle a, b \rangle$ и $y = \langle c, d \rangle$. В [?] са дефинирани следните релации:

$$\begin{aligned} x < y & \text{ ако } a < c \text{ и } b > d \\ x > y & \text{ ако } a > c \text{ и } b < d \\ x \geq y & \text{ ако } a \geq c \text{ и } b \leq d \\ x \leq y & \text{ ако } a \leq c \text{ и } b \geq d \\ x = y & \text{ ако } a = c \text{ и } b = d. \end{aligned}$$

Дефинираните интуиционистки конюнкции и дизюнкции се прилагат при създаването скали за агрегиращи оценки, които се използват при процедура за взимане на решение. Удобно е съответните количествени данните да са структурирани в индексирани матрици. Пример на скала от 10 агрегиращи операции:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \#_1 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \wedge_{1,35} \langle c, d \rangle = \langle ac, 1 - ac \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_2 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \wedge_{1,13} \langle c, d \rangle = \langle ac, b + d - bd \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_3 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \wedge_{1,4} \langle c, d \rangle = \langle \min(a, c), \max(b, d) \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_4 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \wedge_{1,72} \langle c, d \rangle = \langle \min(a, 1 - d), \max(b, d) \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_5 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \wedge_{1,18} \langle c, d \rangle = \langle 1 - \max(b, d), \max(b, d) \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_6 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \vee_{1,12} \langle c, d \rangle = \langle \max(1 - b, c), 1 - \max(1 - b, c) \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_7 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \vee_{1,18} \langle c, d \rangle = \langle \max(1 - b, c), \min(b, d) \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_8 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \vee_{1,22} \langle c, d \rangle = \langle 1 - \min(b, d), \min(b, d) \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_9 \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \vee_{1,50} \langle c, d \rangle = \langle 1 - bd, bd \rangle, \\ \langle a, b \rangle \#_{10} \langle c, d \rangle &= \langle a, b \rangle \vee_{1,49} \langle c, d \rangle = \langle \min(1, 2 - b - d), \max(0, b + d - 1) \rangle \end{aligned}$$

Следващата теорема показва, че дефинираните 10 бинарни операции $\#_i$, $i = 1, 2, \dots, 10$ образуват скала относно частичната наредба в множеството на ин-

туиционистки размитите двойки.

Теорема 4.0.1. . За всеки две интуиционистки размити двойки x и y :

$$\begin{aligned} x\#_1y &\leq x\#_2y \leq x\#_3y \leq x\#_4y \leq x\#_5y \leq x\#_6y \\ &\leq x\#_7y \leq x\#_8y \leq x\#_9y \leq x\#_{10}y. \end{aligned}$$

Разглежданите 10 бинарни операции могат да бъдат обобщени чрез конструиране на аналогични 10 n -местни операции: например нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са интуиционистки размити двойки, където $n \geq 3$. Тогава дефинираме рекурентно операциите:

$$\begin{aligned} \#_s^*(x_1, x_2) &= x_1\#_s x_2, \\ \#_s^*(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \#_s^*(\#_s^*(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n). \end{aligned}$$

Нека за краткост

$$\#_s^* \prod_{j=1}^n x_j = \#_s^*(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Конструираниите операции генерират 10 елементна скала, която можем да интерпретираме по следния начин: $\#_1^*$ - крайно песимистична оценка, $\#_2^*$ - песимистична оценка, и $\#_{10}^*$ - крайно оптимистична оценка.

4.1 Върху някои видове индексирани матрици

Концепцията на индексираниите матрици (ИМ) е обяснена в монографията, цитирана във въведението.

Нека $\mathcal{I}$ е дадено множество от индекси,

$$\mathcal{I}^n = \{ \langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle \mid (\forall j : 1 \leq j \leq n)(i_j \in \mathcal{I}) \}$$

и

$$\mathcal{I}^* = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} \mathcal{I}^n.$$

Нека $\mathcal{X}$ е фиксирано множество. Разширена индексирана матрица (ИМ) с множества от индекси $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{K}, \mathfrak{L} \subset \mathcal{I}^*$) и елементи от $\mathcal{X}$ се нарича обекта:

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \{a_{k_i, l_j}\}]$$

		l_1	$\dots$	l_j	$\dots$	l_n	
	k_1	a_{k_1, l_1}	$\dots$	a_{k_1, l_j}	$\dots$	a_{k_1, l_n}	
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$=$	k_i	a_{k_i, l_1}	$\dots$	a_{k_i, l_j}	$\dots$	a_{k_i, l_n}	$,$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
	k_m	a_{k_m, l_1}	$\dots$	a_{k_m, l_j}	$\dots$	a_{k_m, l_n}	

където $\mathfrak{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, $\mathfrak{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$, за $1 \leq i \leq m$, и $1 \leq j \leq n : a_{k_i, l_j} \in \mathcal{X}$.

3D-разширена индексирана матрица (3D-ИМ) с множество от индекси $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H} \subset I^*$) и елементи от множеството $\mathcal{X}$ се нарича обекта :

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \{a_{k_i, l_j, h_g}\}]$$

$$= \left\{ \begin{array}{c|cccc} h_g & l_1 & \dots & l_j & \dots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1, l_1, h_g} & \dots & a_{k_1, l_j, h_g} & \dots & a_{k_1, l_n, h_g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_i & a_{k_i, l_1, h_g} & \dots & a_{k_i, l_j, h_g} & \dots & a_{k_i, l_n, h_g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_m & a_{k_m, l_1, h_g} & \dots & a_{k_m, l_j, h_g} & \dots & a_{k_m, l_n, h_g} \end{array} \right\} | h_g \in \mathfrak{H},$$

където $\mathfrak{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, $\mathfrak{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$, $\mathfrak{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_f\}$, и за $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq g \leq \mu : a_{k_i, l_j, h_g} \in \mathcal{X}$.

Ако елементите на ИМ или на 3D-ИМ са интуиционистки размити двойки, то ИМ се нарича интуиционистки размита ИМ (ИРИМ). Тези матрици имат вида

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \{\langle \mu_{k_i, l_j}, \nu_{k_i, l_j} \rangle\}]$$

$$= \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & \langle \mu_{k_1, l_1}, \nu_{k_1, l_1} \rangle & \langle \mu_{k_1, l_2}, \nu_{k_1, l_2} \rangle & \dots & \langle \mu_{k_1, l_n}, \nu_{k_1, l_n} \rangle \\ k_2 & \langle \mu_{k_2, l_1}, \nu_{k_2, l_1} \rangle & \langle \mu_{k_2, l_2}, \nu_{k_2, l_2} \rangle & \dots & \langle \mu_{k_2, l_n}, \nu_{k_2, l_n} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_m & \langle \mu_{k_m, l_1}, \nu_{k_m, l_1} \rangle & \langle \mu_{k_m, l_2}, \nu_{k_m, l_2} \rangle & \dots & \langle \mu_{k_m, l_n}, \nu_{k_m, l_n} \rangle \end{array}$$

и

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \{\langle \mu_{k_i, l_j, h_g}, \nu_{k_i, l_j, h_g} \rangle\}] =$$

$$\left\{ \begin{array}{c|cccc} h_g \in \mathfrak{H} & l_1 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & \langle \mu_{k_1, l_1, h_g}, \nu_{k_1, l_1, h_g} \rangle & \dots & \langle \mu_{k_1, l_n, h_g}, \nu_{k_1, l_n, h_g} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_i & \langle \mu_{k_i, l_1, h_g}, \nu_{k_i, l_1, h_g} \rangle & \dots & \langle \mu_{k_i, l_n, h_g}, \nu_{k_i, l_n, h_g} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_m & \langle \mu_{k_m, l_1, h_g}, \nu_{k_m, l_1, h_g} \rangle & \dots & \langle \mu_{k_m, l_n, h_g}, \nu_{k_m, l_n, h_g} \rangle \end{array} \right\} | h_g \in \mathfrak{H},$$

където за всеки $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq g \leq f : \mu_{k_i, l_j, h_g}, \nu_{k_i, l_j, h_g} \in [0, 1]$ и

$$0 \leq \mu_{k_i, l_j, h_g} + \nu_{k_i, l_j, h_g} \leq 1.$$

4.2 Скала от агрегиращи операции над ИРИМ

Операцията транспониране има вида:

$[1, 2, 3]$ -(тържество)

$$\left(\begin{array}{c} \mathfrak{H} \\ \mathfrak{K} \left| \begin{array}{c} \mathfrak{L} \end{array} \right. \end{array} \right)^{[1,2,3]} = \begin{array}{c} \mathfrak{H} \\ \mathfrak{K} \left| \begin{array}{c} \mathfrak{L} \end{array} \right. \end{array}$$

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \{\langle \mu_{k_i, l_j, h_g}, \nu_{k_i, l_j, h_g} \rangle\}]^{[1,2,3]}$$

$$= [\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \{\langle \mu_{k_i, l_j, h_g}, \nu_{k_i, l_j, h_g} \rangle\}];$$

$[1, 3, 2]$ -транспониране

$$\left(\begin{array}{c} \mathfrak{H} \\ \mathfrak{K} \left| \begin{array}{c} \mathfrak{L} \end{array} \right. \end{array} \right)^{[1,3,2]} = \begin{array}{c} \mathfrak{L} \\ \mathfrak{K} \left| \begin{array}{c} \mathfrak{H} \end{array} \right. \end{array}$$

$$[\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \{\langle \mu_{k_i, l_j, h_g}, \nu_{k_i, l_j, h_g} \rangle\}]^{[1,3,2]}$$

$$= [\mathfrak{K}, \mathfrak{H}, \mathfrak{L}, \{\langle \mu_{k_i, l_j, h_g}, \nu_{k_i, l_j, h_g} \rangle\}].$$

Нека са дадени ИРИМ

$$A = [\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \{\langle \mu_{k_i, l_j}, \nu_{k_i, l_j} \rangle\}]$$

и 3D-ИРИМ

$$B = [\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \{\langle \mu_{k_i, l_j, h_g}, \nu_{k_i, l_j, h_g} \rangle\}],$$

където $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{H} \subset \mathcal{I}^*$, и нека $k_0 \notin \mathfrak{K}, l_0 \notin \mathfrak{L}, h_0 \notin \mathfrak{H}$. Дефинираме следните агрегиращи операции над двата типа ИМ, където $1 \leq s \leq 10$:

$$\alpha_{\mathfrak{K}, \#_s^*}(A, k_0) = k_0 \left| \begin{array}{c|ccc} & l_1 & \dots & l_n \\ \hline \begin{matrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{matrix} & \langle \mu_{k_i, l_1}, \nu_{k_i, l_1} \rangle & \dots & \begin{matrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_i, l_n}, \nu_{k_i, l_n} \rangle \end{array} \right. ,$$

$$\alpha_{\mathfrak{L}, \#_s^*}(A, l_0) = \begin{array}{c|c} & l_0 \\ \hline k_1 & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_1, l_j}, \nu_{k_1, l_j} \rangle \\ \\ k_2 & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_2, l_j}, \nu_{k_2, l_j} \rangle \\ \\ \vdots & \vdots \\ \\ k_m & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_m, l_j}, \nu_{k_m, l_j} \rangle \end{array} ,$$

$$\alpha_{\mathfrak{L}, \#_s^*}(B, l_0) = \begin{array}{c|c} h_g \in \mathfrak{H} & l_0 \\ \hline k_1 & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_1, l_j, h_g}, \nu_{k_1, l_j, h_g} \rangle \\ \\ k_2 & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_2, l_j, h_g}, \nu_{k_2, l_j, h_g} \rangle \\ \\ \vdots & \vdots \\ \\ k_m & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_m, l_j, h_g}, \nu_{k_m, l_j, h_g} \rangle \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} l_0 & k_1 & \dots & k_m \\ \hline h_1 & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_1, l_0, h_1}, \nu_{k_1, l_0, h_1} \rangle & \dots & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_m, l_n, h_1}, \nu_{k_m, l_n, h_1} \rangle \\ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \\ h_g & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_1, l_0, h_g}, \nu_{k_1, l_0, h_g} \rangle & \dots & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_m, l_n, h_g}, \nu_{k_m, l_n, h_g} \rangle \\ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \\ h_f & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_1, l_0, h_f}, \nu_{k_1, l_0, h_f} \rangle & \dots & \begin{matrix} n \\ \#_s^* \\ j=1 \end{matrix} \langle \mu_{k_m, l_n, h_f}, \nu_{k_m, l_n, h_f} \rangle \end{array} \right)^{[2,3,1]}$$

$$\alpha_{\mathfrak{K}, \#_s^*}(B, k_0) = \left\{ \begin{array}{c|ccc} h_g \in \mathfrak{H} & l_1 & \dots & l_n \\ \hline k_0 & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_i, l_1, h_g}, \nu_{k_i, l_1, h_g} \rangle & \dots & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_i, l_n, h_g}, \nu_{k_i, l_n, h_g} \rangle \end{array} \middle| h_g \in \mathfrak{H} \right\}$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} k_0 & l_1 & \dots & l_n \\ \hline h_1 & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_0, l_1, h_1}, \nu_{k_0, l_1, h_1} \rangle & \dots & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_0, l_n, h_1}, \nu_{k_0, l_n, h_1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_g & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_0, l_1, h_g}, \nu_{k_0, l_1, h_g} \rangle & \dots & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_0, l_n, h_g}, \nu_{k_0, l_n, h_g} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_f & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_0, l_1, h_f}, \nu_{k_0, l_1, h_f} \rangle & \dots & \begin{smallmatrix} m \\ \#_s^* \\ i=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_0, l_n, h_f}, \nu_{k_0, l_n, h_f} \rangle \end{array} \right)^{[3,2,1]}$$

$$\alpha_{\mathfrak{H}, \#_s^*}(B, h_0) = \begin{array}{c|ccc} h_0 & l_1 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & \begin{smallmatrix} f \\ \#_s^* \\ g=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_1, l_1, h_g}, \nu_{k_1, l_1, h_g} \rangle & \dots & \begin{smallmatrix} f \\ \#_s^* \\ g=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_1, l_n, h_g}, \nu_{k_1, l_n, h_g} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_i & \begin{smallmatrix} f \\ \#_s^* \\ g=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_i, l_1, h_g}, \nu_{k_i, l_1, h_g} \rangle & \dots & \begin{smallmatrix} f \\ \#_s^* \\ g=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_i, l_n, h_g}, \nu_{k_i, l_n, h_g} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m & \begin{smallmatrix} f \\ \#_s^* \\ g=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_m, l_1, h_g}, \nu_{k_m, l_1, h_g} \rangle & \dots & \begin{smallmatrix} f \\ \#_s^* \\ g=1 \end{smallmatrix} \langle \mu_{k_m, l_n, h_g}, \nu_{k_m, l_n, h_g} \rangle \end{array}$$

В статиите¹ е отбелязано, че всяка OLAP структура може да бъде представена чрез подходяща ИМ. Следователно, представените агрегиращи операции могат да бъдат трансформирани (разглеждани) над OLAP-структури, по-точно, когато елементите на тези структури са оценени чрез интуиционистки размити методи. Дискутираните операции могат да бъдат интерпретирани като Data Mining tools.

¹Bureva V, Traneva V, Sotirova E, Atanasov K (2017) Index matrices and OLAP-cube. Part 2: An presentation of the OLAP-analysis by index matrices. Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 27, No. 4, pp 647-672

Traneva, V., Bureva, V., Sotirova, E., Atanasov, K., Index matrices and OLAP-cube. Part 1: Application of the index matrices to presentation of operations in OLAP-cube. Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 27, 2017, No. 2, pp 253-278.

Заклучение

Решени са следните основни задачи:

1. Конструирани са интуиционистки размити конюнкции и дизюнкции по три групи от формули.
2. Изследвани са техните алгебрични свойства – структура на решетка върху множеството на интуиционистки размитите двойки, модуллярност, дистрибутивност, закон за изключеното трето, закони на де Морган и модификации.
3. Създадена е скала относно наредбата в множеството на интуиционистки размитите двойки, която може да се прилага при процедура за взимане на решение чрез индексирани матрици. В този случай количествените данни са структурирани като елементи на индексирани матрици.

Приноси

В настоящия дисертационен труд са получени следните резултати:

Научни приноси

Конструирани са интуиционистки размити конюнкции и дизюнкции по три групи от формули. Изследвани са техните алгебрични свойства - закон за изключеното трето, закони на де Морган и модификации, структура на решетка върху множеството на интуиционистки размитите двойки.

Научно-приложни приноси

Чрез построените операции е конструирана скала относно наредбата в множеството на интуиционистки размитите двойки, която може да се прилага при процедура за взимане на решение чрез индексирани матрици.

Списък с авторските публикации

- [1] Angelova, N., Stoenchev, M., Intuitionistic fuzzy conjunctions and disjunctions from first type, *Annual of "Informatics" Section*, Union of Scientists in Bulgaria, Vol. 8, 2015-2016, 1–17.
- [2] Angelova, N., Stoenchev, M., Intuitionistic fuzzy conjunctions and disjunctions from third type, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, Vol. 23, 2017, No. 5, 29–41, Print ISSN 1310-4926, Online ISSN 2367-8283.
- [3] Angelova, N., Stoenchev, M., Todorov, V., Intuitionistic fuzzy conjunctions and disjunctions from second type, *Issues in Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets*, Vol. 13, 2017, 143–170. ISBN 978-83-61551-21-8.
- [4] Traneva, V., Tranev, S., Stoenchev, M., Attanasov, K., Scaled aggregation operations over two and three dimensional index matrices, *Soft Computing*, Springer, in press, IF(2016): 2.472, ISSN: 1432-7643, eISSN: 1433-7479, <https://link.springer.com/journal/500>.

В първите три статии са изложени резултатите от втора глава, четвъртата статия съдържа резултатите описани в глава 4.

Авторът е участник в проект ДФНИ-И-02-05/2014 „Интеркритериален анализ – нов подход за вземане на решения“