

ИНСТИТУТ ПО БИОФИЗИКА И БИМЕДИЦИНСКО ИНЖЕНЕРСТВО
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ПРЕТОПОЛОГИЧНИ, ТОПОЛОГИЧНИ
И АЛГЕБРИЧНИ СТРУКТУРИ
ЗА ИНТУИЦИОНИСТКИ РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Евгений Иванов Маринов

АВТОРЕФЕРАТ

НА ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД, ПРЕДСТАВЕН ЗА ПРИСЪЖДАНЕ
НА ОБРАЗОВАТЕЛНА И НАУЧНА СТЕПЕН “ДОКТОР”

ПО ПРОФЕСИОНАЛНО НАПРАВЛЕНИЕ:
4.6 “ИНФОРМАТИКА И КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”,
НАУЧНА СПЕЦИАЛНОСТ: 01 01 12 “ИНФОРМАТИКА”

НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ:
ЧЛ. - КОР. ПРОФ. ДМН ДТН КРАСИМИР АТАНАСОВ

София, 2020

Защитата на дисертационния труд ще се състои на от в заседателната зала на Институт по биофизика и биомедицинско инженерство – Българска академия на науките (ул. “Акад. Г. Бончев бл. 105”).

Дисертационният труд е обсъждан на разширен научен семинар на секция “Биоинформатика и математическо моделиране” на ИБФБМИ на 02.06.2020 г.

Дисертационният труд съдържа увод, 6 глави и заключение и е в обем от 136 страници. Цитирани са 107 литературни източника. Основните резултати от дисертацията са публикувани в 8 научни публикации.

Автор: Евгений Иванов Маринов

Заглавие: Претопологични, топологични и алгебрични структури за интуиционистки развити множества

БЛАГОДАРНОСТИ

На първо място бих искал да изразя благодарността си към моя научен ръководител проф. дмн дтн Красимир Атанасов за непрестанната подкрепа по време на докторантската ми изследователска дейност, за неговото търпение, мотивация, ентусиазъм и познание в областта. Неговите насоки ми помагаша през цялото време на изследователската работа и писането на дисертационния труд.

Моите благодарности са насочени също към колегите ми от Института по биофизика и биомедицинско инженерство от Българската академия на науките, директора проф. д-р Таня Пенчева и специално към колегите от секцията по Биоинформатика и математическо моделиране. Специални благодарности за д-р Петър Василев за неговата непрестанна подкрепа по време на целия период на моето докторантското следване, както и доц. д-р Радослав Цветков, доц. д-р Вася Атанасова, доц. д-р Олимпия Роева.

И накрая, но не на последно място, бих искал да изразя моите благодарности към родителите ми, за непрестанната подкрепа към крайната цел, за тяхното разбиране и окуражаване по всякакви възможни начини.

Част от изследователската работа по време на докторантското следване беше подкрепена от:

1. ДФНИ-И02/5 „Интеркритериален анализ - Нов подход за вземане на решения“.

Увод

Мотивация

През 1965 г., с основополагащата си статия [107], Лотфи Заде (Lotfi Zadeh), като обобщава понятието характеристична функция чрез въведената от него функция на принадлежност, поставя началото на направление в математиката, днес широко известно под името Теория на размитите множества (Fuzzy set theory). През 1983 г., с работата си [8], Красимир Атанасов (Krassimir Atanassov) обобщава понятието размито множество (РМ), дефинирайки понятието интуиционистки размито множество (ИРМ) над непразен универсум X . Това е извършено с помощта на втора обобщена характеристична функция, свързана с допълнението на множеството до универсума, наречена функция на непринадлежност. Така е положено началото на ново направление в математиката, известно под името Теория на интуиционистки размитите множества (Intuitionistic fuzzy set theory), което допълва Теорията на размитите множества в търсенето на многоаспектни приложения и се развива паралелно със същата.

Операциите включване, обединение, сечение, допълнение са разширени от класическата теория на множествата до теорията на ИРМ [11, 13]. Те са основополагащи за въвеждането на претопологични и топологични пространства (cf. Arkhangel'skii и Fedorchuk [7]). Топологията исторически произлиза от геометрията, но тук вече обекти като окръжности, многостени, триъгълници и др. не се разглеждат като твърди тела (фигури), с добре дефинирани разстояния между принадлежащите им точки и ъгли между ръбовете или повърхностите. Разстоянията не винаги са релевантни в концепцията на общата топология, но понятието за близост или околност е основополагащо. Това понятие се установява чрез въвеждането на т.н. отворени множества, както и допълващите ги - затворените множества. В определени ситуации свойствата, които са най-важни са тези, които се запазват, когато разглеждаме обектите като деформируеми или пластични вместо като твърди тела. Такива ситуации възникват в области като физика (механика на непрекъснатите среди), биология, теория на системите и др.

През 1967 г. Хамер [46] показва, че с някои разширения на принципите от общата топология, е възможно да се моделира почти всяка формална система. Той въвежда изотонните пространства (isotonic spaces), които по-късно са наречени претопологични пространства (Arkhangel'skii A. and Fedorchuk V. [7, Гл. 2.5]).

През 1968 г. Чанг (Chang [26]) въвежда понятието размито топологично пространство и изследва неговите свойства. През 1983 г. К. Атанасов въвежда първите топологични оператори за ИРМ. Ще покажем, че въведените в дисертационния труд топологични и претопологични оператори разширяват тези, въведени от К. Атанасов [10] (1986), [11] (1999), [18](2001) и [13](2019):

$$\mathcal{C}, \mathcal{I}, \mathcal{C}_s, \mathcal{I}_s, \text{ където } s \in \{\mu, \nu\}.$$

Пълните дефиниции на последните оператори и техните разширения ще бъдат дадени в следващите глави. Аксиомите на размитите (пре)топологични пространства са разширени от Доган Чокер през 1997 (Çoker [29]) до интуиционистки размити топологични пространства. След статията на Чокер биват публикувани множество статии в областта на топологиите за ИРМ, но

повечето от тях следват чисто теоретичния аксиоматичен подход.

Цел и задачи на дисертацията

Цел на дисертационния труд е да се изложи теория на топологичните и претопологичните оператори за ИРМ по един по-конструктивен начин.

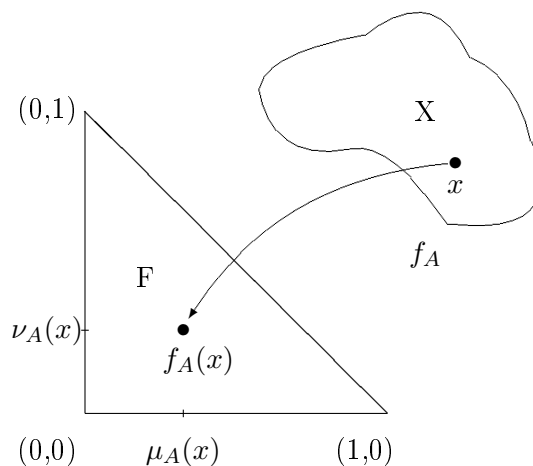
За достигане на крайната цел на дисертацията, се решават следните основни задачи:

1. Въвеждане на нови наредби за ИРМ;
2. Въвеждане на индекси за неопределеност и индикатори за включване;
3. Въвеждане на различни типове околности за ИРМ;
4. Разработка на софтуерно приложение, изчисляващо и визуализиращо въведените оператори. [https://github.com/evg-mar/ifs_modeler]

Глава 1

Кратко въведение в ИРМ

В тази глава се дава кратко изложение на теорията на ИРМ, както и основните понятия, необходими за въвеждане на авторските дефиниции и теореми впоследствие. След въвеждането на РМ има множество разширения. Повечето разширения се състоят от замяната на областта от стойности на характеристичната функция от интервала $[0, 1]$ с произволна решетка или полурешетка (cf. Birkhoff [25]). Тези разширения се наричат L -размити множества (L-fuzzy sets, cf. Goguen [38]). При предложеното разширение на РМ от Красимир Атанасов през 1983 г. [8], наречено интуиционистки размити множества ИРМ, решетката L приема формата на равнобедрен правоъгълен триъгълник с дължина на катетите 1 (ИР-триъгълник). ИР-триъгълникът е изобразен на Фиг. 1.6.



Фигура 1.6: Триъгълно представяне на точка от X в F .

Формално, нека ни е дадено фиксирано множество X в класическия смисъл. Тогава ИРМ A^* в X е обект, имащ следния вид

$$A^* = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X\}, \quad (1.1)$$

където функциите $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ и $\nu_A : X \rightarrow [0, 1]$ дефинират *степеня на принадлежност* и *съответно степеня на непринадлежност* на елемента $x \in X$ към ИРМ A^* ; и за всяко $x \in X$

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1. \quad (1.2)$$

Очевидно, всяко обикновено РМ приема вида

$$\{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle | x \in X\}.$$

Ако

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x), \quad (1.3)$$

тогава $\pi_A(x)$ наричаме *степен на неопределеност* на принадлежността на елемента $x \in X$ към ИРМ A . В случая на обикновено РМ, $\pi_A(x) = 0$ за всяко $x \in X$.

За простота ще пишем A вместо A^* и ще дадем формалната дефиниция на ИРМ,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X \text{ \& } 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\}. \quad (1.4)$$

Отрицанието или още *допълнението* $\neg A$ на горе дефинираното $A \in IFS(X)$ се дефинира като

$$\neg A = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle | x \in X \text{ \& } 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\}. \quad (1.5)$$

Три много важни примера на ИРМ са използвани в дисертационния труд, особено при въвеждането и изследването на различните видове наредби:

$$O_X^* \text{ (или } O^*(X)) := \{\langle x, 0, 1 \rangle | x \in X\}, \quad (1.6)$$

$$E_X^* \text{ (или } E^*(X)) := \{\langle x, 1, 0 \rangle | x \in X\}, \quad (1.7)$$

$$U_X^* \text{ (или } U^*(X)) := \{\langle x, 0, 0 \rangle | x \in X\}, \quad (1.8)$$

Нека припомним два важни оператора, наречени модални, които са въведени от К. Атанасов в [8]. Операторите за “необходимо” и “възможно” (обозначени съответно чрез $\Box$ и $\Diamond$), приложени върху $A \in IFS(X)$ имат вида,

$$\Box A = \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle | x \in X\}, \quad (1.9)$$

$$\Diamond A = \{\langle x, 1 - \nu(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X\} \quad (1.10)$$

Ако $A \in IFS(X)$ е фиксирано ИРМ в универсума X , можем да конструираме функцията $f_A : X \rightarrow F$, такава че за всяко $x \in X$:

$$f_A(x) = \langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \in F. \quad (1.11)$$

1.2 Основни операции върху ИРМ и тяхната геометрична интерпретация

В Раздел 1.2 даваме основните операции за ИРМ и тяхната геометрична интерпретация, както са изложени в [13]. Навсякъде в дисертацията “iff” ще означава “тогава и само тогава, когато”.

$$A \subseteq B \text{ iff } (\forall x \in X)(\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ \& } \nu_A(x) \geq \nu_B(x)) \quad (1.12)$$

$$A \supseteq B \text{ iff } B \subseteq A \quad (1.13)$$

$$A = B \text{ iff } (\forall x \in X)(\mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ \& } \nu_A(x) = \nu_B(x)) \quad (1.14)$$

$$A \cap B = \{\langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle | x \in X\} \quad (1.15)$$

$$A \cup B = \{\langle x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\nu_A(x), \nu_B(x)) \rangle | x \in X\} \quad (1.16)$$

Ако A и $B \in IFS(X)$, тогава функцията $f_{A \cap B}$ изобразява за всяко $x \in X$, точка $f_{A \cap B}(x) \in F$ (ИР-триъгълник) с координати

$$\langle \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\nu_A(x), \nu_B(y)) \rangle.$$

1.3 Стандартни топологични оператори за ИРМ

Следвайки [13], нека дефинираме следните два топологични оператора. За всяко ИРМ A ,

$$\mathcal{C}(A) = \{\langle x, K, L \rangle | x \in X\}, \quad (1.20)$$

където

$$K = \sup_{y \in X} \mu_A(y) \quad (1.21)$$

$$L = \inf_{y \in X} \nu_A(y) \quad (1.22)$$

и

$$\mathcal{I}(A) = \{\langle x, k, l \rangle | x \in X\}, \quad (1.23)$$

където

$$k = \inf_{y \in E} \mu_A(y), \quad (1.24)$$

$$l = \sup_{y \in E} \nu_A(y). \quad (1.25)$$

1.4 Разширени топологични оператори

Следните оператори са дефинирани в [13], като разширение на операторите $\mathcal{C}$ и $\mathcal{I}$, дефинирани в предходния Раздел 1.3.

$$\mathcal{C}_\mu(A) = \{\langle x, K, \min(1 - K, \nu_A(x)) \rangle | x \in X\}; \quad (1.26)$$

$$\mathcal{C}_\nu(A) = \{\langle x, \mu_A(x), L \rangle | x \in X\}; \quad (1.27)$$

$$\mathcal{I}_\mu(A) = \{\langle x, k, \nu_A(x) \rangle | x \in X\}; \quad (1.28)$$

$$\mathcal{I}_\nu(A) = \{\langle x, \min(1 - l, \mu_A(x)), l \rangle | x \in X\}, \quad (1.29)$$

където K, L, k, l съответно имат вида (1.21), (1.22), (1.24), (1.25).

1.5 Разширени модални оператори

Следвайки [13, 14], ще изложим няколко типа оператори, т.нар. разширени модални оператори, които ще използваме в следващите глави. Фактически, дефинирайки разширените модални оператори в дисертационния труд, прилагаме подходящи субституции на техните параметри α и/или β , така че, ако $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ съответният оператор се превръща в идентитет.

Нека $\alpha, \beta \in [0, 1]$ да са фиксирани реални числа. При дадено ИРМ A , дефинираме:

$$\mathcal{D}_\alpha(A) = \{\langle x, \mu_A(x) + \alpha \cdot \pi_A(x), \nu_A(x) + (1 - \alpha) \cdot \pi_A(x) \rangle | x \in X\}. \quad (1.35)$$

Ако $\alpha, \beta \in [0, 1]$ и $\alpha + \beta \leq 1$, то

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta}(A) = \{\langle x, \mu_A(x) + \alpha \cdot \pi_A(x), \nu_A(x) + \beta \cdot \pi_A(x) \rangle | x \in X\}. \quad (1.36)$$

Ако $\alpha, \beta \in [0, 1]$, то

$$\mathcal{G}_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, (1-\alpha)\mu_A(x), (1-\beta)\nu_A(x) \rangle \mid x \in X\} \quad (1.37)$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, (1-\alpha)\mu_A(x), \nu_A(x) + \beta\pi_A(x) \rangle \mid x \in X\}; \quad (1.38)$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^*(A) = \{\langle x, (1-\alpha)\mu_A(x), \nu_A(x) + \beta(1 - (1-\alpha)\mu_A(x) - \nu_A(x)) \rangle \mid x \in X\}; \quad (1.39)$$

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}(A) = \{\langle x, \mu_A(x) + \alpha\pi_A(x), (1-\beta)\nu_A(x) \rangle \mid x \in X\}; \quad (1.40)$$

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^*(A) = \{\langle x, \mu_A(x) + \alpha(1 - \mu_A(x) - (1-\beta)\nu_A(x)), (1-\beta)\nu_A(x) \rangle \mid x \in X\}; \quad (1.41)$$

Глава 2

π -наредба, Квази-наредби и Индикатори за включване

2.1 π -наредба, Квази-наредби и Неопределеност

Главните резултати в Раздел 2.1 са изложени от автора на дисертацията в статиите [69] и [67].

Говорейки за частична наредба в ИРМ, обикновено имаме предвид стандартната наредба $(IFS(X), \leq)$, където $\leq$ е вече дефинираната наредба $\subseteq$ в $IFS(X)$. При стандартната наредба за всеки две A and $B \in IFS(X)$: $A \leq B$ е удовлетворено iff

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ и } \nu_A(x) \geq \nu_B(x)$$

за всички $x \in X$.

Дефиниция 1 (Квази-наредби, [13, 69]) Нека вземем $A, B \in IFS(X)$ и дефинираме

$$A \leq_{\square} B \text{ iff } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ за всяко } x \in X \quad (2.1)$$

и

$$A \leq_{\diamond} B \text{ iff } \nu_A(x) \geq \nu_B(x) \text{ за всяко } x \in X. \quad (2.2)$$

Очевидно двете релации $\leq_{\square}$ и $\leq_{\diamond}$ са рефлексивни и транзитивни, т.е. и двете са квази-наредби в $IFS(X)$.

2.1.1 π -наредба

В [69] авторът на дисертацията въвежда нова наредба в $IFS(X)$ и изследва някои от нейните свойства и приложения.

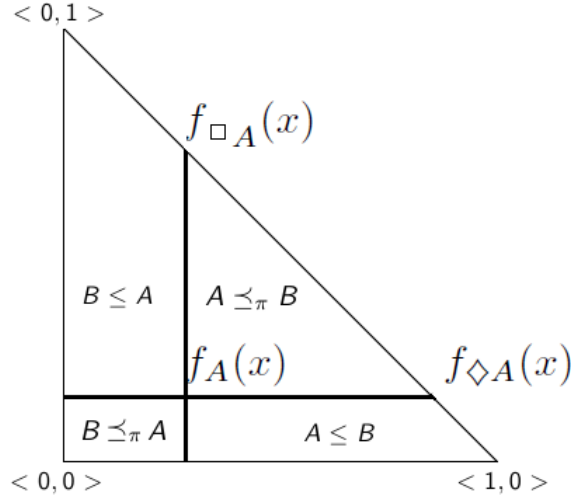
Дефиниция 2 За всеки две ИРМ A и $B \in IFS(X)$, нека дефинираме следната бинарна релация :

$$A \preceq_{\pi} B \text{ iff } (\forall x \in X)(\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \ \& \ \nu_A(x) \leq \nu_B(x))$$

На Фиг. 2.2 може да се види триъгълното представяне на ИРМ A и B в една конкретна точка x от X при $A \preceq_{\pi} B$ и $B \preceq_{\pi} A$.

Бърза проверка показва, че $\preceq_{\pi}$ удовлетворява трите аксиоми за частична наредба, т.е. рефлексивност, транзитивност и антисиметричност.

Теорема 2 ([69]) Горedefинираната бинарна релация $\preceq_{\pi}$ е частична наредба в $IFS(X)$.



Фигура 2.2: Триъгълно представяне на ИРМ A и $B \in IFS(X)$ в конкретна точка $x \in X$. Виждаме позицията на $f_B(x)$ при $A \preceq_{\pi} B$ или $B \preceq_{\pi} A$.

Едно частично наредено множество $(E, \preceq)$ се нарича *лява полурешетка* (*дясна полурешетка*) iff за всеки две $e_1, e_2 \in E$ съществува тяхната точна долна граница (точна горна граница), или infimum (supremum).

Частично наредено множество, което е едновременно лява и дясна полурешетка, се нарича *решетка*. Освен това, ако частично наредено множество $(E, \preceq)$ има свойството, че всяко подмножество $E' \subset E$, E' притежава infimum (supremum), тогава E се нарича *пълна лява* (*дясна*) *полурешетка* по отношение на $\preceq$. Ако E е едновременно пълна лява и дясна полурешетка, тогава се нарича *пълна решетка*.

Следната теорема е въведена от автора на дисертацията.

Теорема 3 ([69]) *π -решетката е лява полурешетка, но не е дясна полурешетка. Минималният елемент в тази решетка е*

$$U_X^* = \{ \langle x, 0, 0 \rangle \mid x \in X \} \in IFS(X),$$

както е дефинирано в (1.8).

В дисертацията е показано, че максималните елементи в π -наредбата са точно тези ИРМ, за които степента на неопределеност π е 0, т.е. стандартните РМ.

2.1.2 Индекс на неопределеност

В Раздел 2.1.2 въвеждаме аксиоматика за индекс на неопределеност, който измерва колко далече се намира едно ИРМ от обикновено РМ, т.е. множество с нулева степен на неопределеност. Следната дефиниция е въведена от автора в [69].

Дефиниция 3 (Индекс на неопределеност) *Нека вземем A и B от $IFS(X)$, а U_X^* - минималният елемент на $(IFS(X), \preceq_{\pi})$. Индекс на неопределеност върху $IFS(X)$, който означаваме с ind_{π} , с област от стойности в интервала $[0, 1]$, по дефиниция трябва да удовлетворява следните аксиоми:*

1. $ind_{\pi}(A) = 0$ iff $A \in FS(X)$,

2. $ind_{\pi}(A) = 1$ iff $A = 0_{\pi}$,
3. $ind_{\pi}(A) \leq ind_{\pi}(B)$, ако $B \preceq_{\pi} A$.

Забележка 3 Нека забележим, че индексът на неопределеност приема своята максимална стойност, т.е. 1, върху минималния елемент на $(IFS(X), \preceq_{\pi})$. От друга страна, ind_{π} приема своята минимална стойност, т.е. 0, върху максималните елементи на $(IFS(X), \preceq_{\pi})$, т.е. $FS(X)$. Третата аксиома казва точно, че ind_{π} е нарастваща функция.

В Раздел 2.1.2 дефинираме четири различни вида индекси на неопределеност. Тук ще дадем само два от тях. Нека X е крайно множество и нека дефинираме индекса на неопределеност по следния начин:

$$\begin{aligned} ind_{\pi,1}: IFS(X) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \pi_A(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Със същото предположение за крайност на универсума, въвеждаме друга версия на индекса на неопределеност, съответстващ на “sup” метриката в $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ind_{\pi,\infty}: IFS(X) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \sup_{x \in X} \pi_A(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Индикатори на включване

Основните резултати в Раздел 2.2 са изложени от автора на дисертацията в [65]. Основната идея на двата типа индикатори на включване, е да измерят доколко едно ИРМ е включено в друго ИРМ, взимайки под внимание двете разглеждани наредби за ИРМ, както и двете квази-наредби, изложени в Дефиниция 1. Първо въвеждаме *теоретико-множествения индикатор на включване j* . В края на текущия раздел, въз основа на j , въвеждаме индикатора на включване $i(A, B)$ за всеки две $A, B \in IFS(X)$. Като $i(A, B)$ се оказва само по себе си ИРМ от $IFS(U_i)$, където

$$U_i = \{\varepsilon_0, \varepsilon_{\pi}, \varepsilon_{\square}, \varepsilon_{\diamond}\}, \quad (2.9)$$

е универсумът за този индикатор. От дефиницията на U_i , смисълът на неговите елементи е:

- ε_0 съответства на строгата стандартна наредба;
- ε_{π} съответства на строгата π -наредба;
- $\varepsilon_{\square}$ съответства на квази $\square$ -наредбата;
- $\varepsilon_{\diamond}$ съответства на квази $\diamond$ -наредбата.

2.2.1 Теоретико-множествен индикатор на включване j

Нека универсумът X е крайно множество и дефинираме U_j по следния начин

$$U_j = \{\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{0,\mu}, \varepsilon_{0,\nu}, \varepsilon_{\pi,\mu}, \varepsilon_{\pi,\nu}, \varepsilon_{\square,\mu}, \varepsilon_{\square,\nu}, \varepsilon_{\diamond,\mu}, \varepsilon_{\diamond,\nu}\}. \quad (2.10)$$

От особена важност ще са следните изображения $\eta: U_j \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, отговарящи на определени условия.

Дефиниция 6 Нека означим фамилията на всички функции с дефиниционна област U_j и област от стойности $\mathcal{P}(X)$ чрез $\mathcal{P}(X)^{U_j}$. Тогава, важно подмножество на $\mathcal{P}(X)^{U_j}$ може да се дефинира чрез

$$Split(U_j, X) = \{\eta \mid \eta \in \mathcal{P}(X)^{U_j} \text{ \& } \bigcup_{k \in U_j} \eta(k) = X \text{ \& } (\forall k, l \in U_j)(k \neq l \Rightarrow \eta(k) \cap \eta(l) = \emptyset)\}.$$

За произволно изображение $g : X \longrightarrow Y$ и кое да е подмножество $Y_1 \subseteq Y$, обозначаваме праобраза на Y_1 чрез

$$g^{-1}Y_1 = \{x \mid x \in X \text{ \& } g(x) \in Y_1\}.$$

Дефиниция 7 В горевъведените означения, където $A, B \in IFS(X)$, нека дефинираме

$$j : IFS(X) \times IFS(X) \longrightarrow Split(U_j, X), \quad (2.11)$$

с $j(A, B) \in Split(U_j, X)$ по следния начин:

1. За ε_{eq} :

- $j(A, B)(\varepsilon_{eq}) = (\mu_B - \mu_A)^{-1}\{0\} \cap (\nu_B - \nu_A)^{-1}\{0\}.$

2. За ε_0 :

- $j(A, B)(\varepsilon_{0,\mu}) = (\mu_B - \mu_A)^{-1}(0, 1] \cap (\nu_A - \nu_B)^{-1}(0, 1],$
- $j(A, B)(\varepsilon_{0,\nu}) = (\nu_B - \nu_A)^{-1}(0, 1] \cap (\mu_A - \mu_B)^{-1}(0, 1].$

3. За ε_π :

- $j(A, B)(\varepsilon_{\pi,\mu}) = (\mu_B - \mu_A)^{-1}(0, 1] \cap (\nu_B - \nu_A)^{-1}(0, 1],$
- $j(A, B)(\varepsilon_{\pi,\nu}) = (\mu_A - \mu_B)^{-1}(0, 1] \cap (\nu_A - \nu_B)^{-1}(0, 1].$

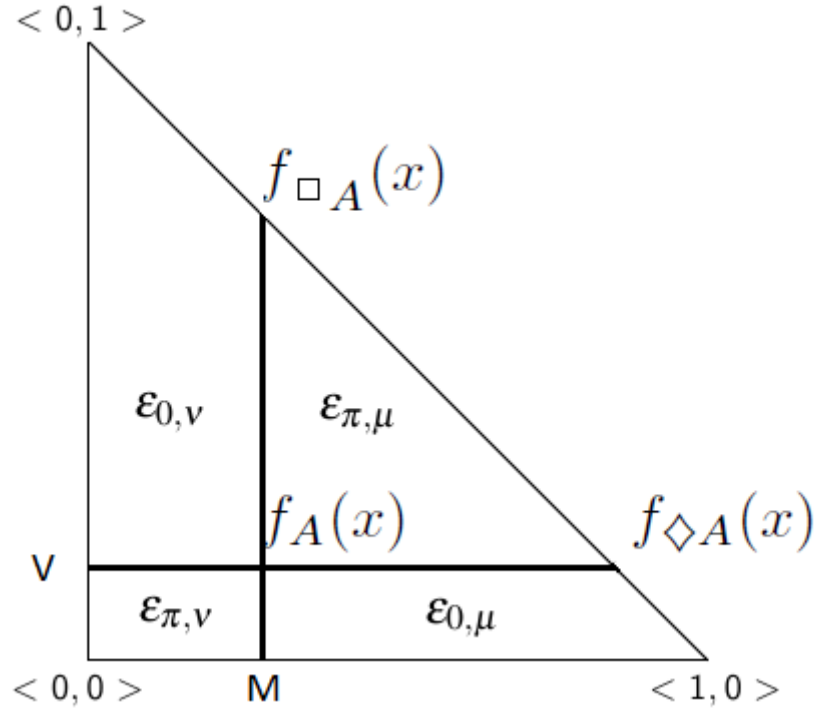
4. За $\varepsilon_\square$:

- $j(A, B)(\varepsilon_{\square,\mu}) = (\mu_B - \mu_A)^{-1}(0, 1] \cap (\nu_B - \nu_A)^{-1}\{0\},$
- $j(A, B)(\varepsilon_{\square,\nu}) = (\mu_A - \mu_B)^{-1}(0, 1] \cap (\nu_B - \nu_A)^{-1}\{0\}.$

5. За $\varepsilon_\diamond$:

- $j(A, B)(\varepsilon_{\diamond,\mu}) = (\mu_B - \mu_A)^{-1}\{0\} \cap (\nu_A - \nu_B)^{-1}(0, 1],$
- $j(A, B)(\varepsilon_{\diamond,\nu}) = (\mu_B - \mu_A)^{-1}\{0\} \cap (\nu_B - \nu_A)^{-1}(0, 1].$

Лесно се проверява, че горedefинираното $j(A, B)$ е наистина елемент на $Split(U_j, X)$, съответстващ на фамилията от релациите на еквивалентност в X с не повече от 9 класа на еквивалентност.



Фигура 2.3: Илюстрация на триъгълното представяне на ИРМ A в конкретна точка $x \in X$ и четирите фигури (разделящи триъгълната площ), съответстващи на $\varepsilon_{0,\mu}, \varepsilon_{0,\nu}, \varepsilon_{\pi,\mu}, \varepsilon_{\pi,\nu} \in U_j$.

Нека сега в $Split(U_j, X)$ дефинираме бинарна релация, обозначавайки я $\preceq_j$.

Дефиниция 8 За кои да е два елемента η_1, η_2 на $Split(U_j, X)$, нека дефинираме следната бинарна релация $\preceq_j$: $\eta_1 \preceq_j \eta_2$ iff

1. За ε_{eq} :

- $\eta_1(\varepsilon_{eq}) \subseteq \eta_2(\varepsilon_{eq})$.

2. За ε_0 :

- $\eta_1(\varepsilon_{0,\mu}) \subseteq \eta_2(\varepsilon_{0,\mu})$,
- $\eta_1(\varepsilon_{0,\nu}) \supseteq \eta_2(\varepsilon_{0,\nu})$.

3. За ε_π :

- $\eta_1(\varepsilon_{\pi,\mu}) \subseteq \eta_2(\varepsilon_{\pi,\mu})$,
- $\eta_1(\varepsilon_{\pi,\nu}) \supseteq \eta_2(\varepsilon_{\pi,\nu})$.

4. За $\varepsilon_\square$:

- $\eta_1(\varepsilon_{\square,\mu}) \subseteq \eta_2(\varepsilon_{\square,\mu})$,
- $\eta_1(\varepsilon_{\square,\nu}) \supseteq \eta_2(\varepsilon_{\square,\nu})$.

5. За $\varepsilon_\diamond$:

- $\eta_1(\varepsilon_{\diamond,\mu}) \subseteq \eta_2(\varepsilon_{\diamond,\mu})$,

- $\eta_1(\varepsilon_{\diamond, \nu}) \supseteq \eta_2(\varepsilon_{\diamond, \nu})$.

Нека забележим, че в горната дефиниция, релацията $\preceq_j$ може да се изложи в малко по-компактен вид. За $\eta_1, \eta_2 \in \text{Split}(U_j, X)$ имаме, че $\eta_1 \preceq_j \eta_2$ iff

1. За ε_{eq} :

- $\eta_1(\varepsilon_{eq}) \subseteq \eta_2(\varepsilon_{eq})$.

2. За всяко $k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}$:

- $\eta_1(\varepsilon_{k, \mu}) \subseteq \eta_2(\varepsilon_{k, \mu})$,
- $\eta_1(\varepsilon_{k, \nu}) \supseteq \eta_2(\varepsilon_{k, \nu})$.

Следната теорема е въведена от автора на дисертацията.

Теорема 7 *Бинарната релация $\preceq_j$, въведена в Дефиниция 8, е частична наредба в $\text{Split}(U_j, X)$. Тоест, тя удовлетворява трите аксиоми за наредба: рефлексивност, транзитивност и антисиметричност.*

2.2.2 ИР-индикатор на включване ι

За да можем да въведем основното понятие в този раздел, т.е. ИР-индикатор на включване, ще ни трябва следното изображение:

$$\text{Val} : \text{Split}(U_j, X) \longrightarrow \text{IFS}(U_i),$$

където U_i беше вече дефинирано като $U_i = \{\varepsilon_0, \varepsilon_\pi, \varepsilon_\square, \varepsilon_\diamond\}$. За всяко $\eta \in \text{Split}(U_j, X)$ имаме $\text{Val}(\eta) \in \text{IFS}(U_i)$, такова че:

1. За ε_0 :

- $\mu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_0) = \frac{|\eta(\varepsilon_{0, \mu})|}{|X|}$ и $\nu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_0) = \frac{|\eta(\varepsilon_{0, \nu})|}{|X|}$

2. За ε_π :

- $\mu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_\pi) = \frac{|\eta(\varepsilon_{\pi, \mu})|}{|X|}$ и $\nu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_\pi) = \frac{|\eta(\varepsilon_{\pi, \nu})|}{|X|}$

3. За $\varepsilon_\square$:

- $\mu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_\square) = \frac{|\eta(\varepsilon_{\square, \mu})|}{|X|}$ и $\nu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_\square) = \frac{|\eta(\varepsilon_{\square, \nu})|}{|X|}$

4. За $\varepsilon_\diamond$:

- $\mu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_\diamond) = \frac{|\eta(\varepsilon_{\diamond, \mu})|}{|X|}$ и $\nu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_\diamond) = \frac{|\eta(\varepsilon_{\diamond, \nu})|}{|X|}$

Нека отбележим, че в горната дефиниция на функцията Val , изображението на който да е елемент от дефиниционната му област, може да се представи в следната по-компактна форма. За всяко $k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}$ ще пишем:

$$\mu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_k) = \frac{|\eta(\varepsilon_{k, \mu})|}{|X|} \text{ и } \nu_{\text{Val}(\eta)}(\varepsilon_k) = \frac{|\eta(\varepsilon_{k, \nu})|}{|X|}. \quad (2.12)$$

В дисертацията е показано, че $\text{Val}(\eta)$ е валиден елемент на $\text{IFS}(U_i)$. От дефиницията на $\text{Split}(U_j, X)$, за който да е от неговите елементи η , имаме $\bigcup_{k \in U_j} \eta(k) = X$. Освен това за кои да

е две ε_1 и $\varepsilon_2 \in U_j$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ следва, че $\eta(\varepsilon_1) \cap \eta(\varepsilon_2) = \emptyset$. От горните изрази получаваме, че $\sum_{\varepsilon \in U_j} |\eta(\varepsilon)| = |X|$, т.е. ,

$$|\eta(\varepsilon_{eq})| + \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} |\eta(\varepsilon_{k, \mu})| + \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} |\eta(\varepsilon_{k, \nu})| = |X|.$$

Разделяйки двете страни на горния израз на $|X|$, получаваме

$$\frac{|\eta(\varepsilon_{eq})|}{|X|} + \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \frac{|\eta(\varepsilon_{k, \mu})|}{|X|} + \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \frac{|\eta(\varepsilon_{k, \nu})|}{|X|} = 1.$$

От последното равенство и дефиницията на Val , получаваме следното твърдение.

Забележка 4 За всяко $\eta \in Split(U_j, X)$, имаме

$$0 \leq \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \mu_{Val(\eta)}(\varepsilon_k) + \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \nu_{Val(\eta)}(\varepsilon_k) \leq 1. \quad (2.13)$$

1. Дясната страна на неравенството се превръща в равенство iff $|\eta(\varepsilon_{eq})| = 0$, т.е. $\eta(\varepsilon_{eq}) = \emptyset$.
2. Лявата страна на неравенството се превръща в равенство iff $|\eta(\varepsilon_{eq})| = |X|$, т.е. $\eta(\varepsilon_{eq}) = X$.

Горната забележка ни позволява да дадем следната теорема.

Теорема 8 Изображението $Val : Split(U_j, X) \longrightarrow IFS(U_i)$ е добре дефинирано. Неговата област от стойности е подмножество на $IFS(U_i)$, т.е. за всяко $\eta \in Split(U_j, X)$ имаме

$$(\forall \varepsilon \in U_i)(\mu_{Val(\eta)}(\varepsilon) + \nu_{Val(\eta)}(\varepsilon) \leq 1).$$

Нека въведем сега най-важната за тази глава дефиниция.

Дефиниция 9 (ИР-индикатор на включване) Изображението

$$\iota : IFS(X) \times IFS(X) \longrightarrow IFS(U_i)$$

ще наричаме ИР-индикатор на включване. Нека го дефинираме като композицията на вече въведените j и Val , т.е. $\iota = (Val \circ j)$.

$$\iota : IFS(X) \times IFS(X) \xrightarrow{j} Split(U_j, X) \xrightarrow{Val} IFS(U_i).$$

Забележка 7 Нека $\eta = j(A, B) \in Split(U_j, X)$ за някои $A, B \in IFS(X)$ и нека обясним какво точно изразява $Val(\eta) = Val(j(A, B)) = \iota(A, B)$ (вж. Фиг. 2.2 и Фиг. 2.3 за геометрична интерпретация).

1. За ε_0 :

- $\mu_{\iota(A, B)}(\varepsilon_0) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ f_A(x) < f_B(x)\}|$, т.е. нормализирания брой на елементи $x \in X$, такива че $f_A(x) < f_B(x)$,
- $\nu_{\iota(A, B)}(\varepsilon_0) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ f_A(x) > f_B(x)\}|$, т.е. нормализирания брой на елементи $x \in X$, такива че $f_A(x) > f_B(x)$.

2. За ε_π :

- $\mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\pi) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ f_A(x) \prec_\pi f_B(x)\}|$, т.е. нормализирания брой на елементи $x \in X$, такива че $f_A(x) \prec_\pi f_B(x)$,
- $\nu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\pi) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ f_A(x) \succ_\pi f_B(x)\}|$, т.е. нормализирания брой на елементи $x \in X$, такива че $f_A(x) \succ_\pi f_B(x)$.

3. За $\varepsilon_\square$:

- $\mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\square) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ \mu_A(x) < \mu_B(x) \ \& \ \nu_A(x) = \nu_B(x)\}|$,
- $\nu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\square) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ \mu_A(x) > \mu_B(x) \ \& \ \nu_A(x) = \nu_B(x)\}|$.

4. За $\varepsilon_\diamond$:

- $\mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\diamond) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ \mu_A(x) = \mu_B(x) \ \& \ \nu_A(x) > \nu_B(x)\}|$,
- $\nu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\diamond) = \frac{1}{|X|} |\{x \mid x \in X \ \& \ \mu_A(x) = \mu_B(x) \ \& \ \nu_A(x) < \nu_B(x)\}|$.

Теорема 9 В горedefинираните понятия, нека $A, B \in IFS(X)$, тогава е изпълнено

$$\iota(A, B) = \neg \iota(B, A).$$

Забележка 8 Нека отбележим, че в (2.13) за $\eta = j(A, B)$, където $A, B \in IFS(X)$, равенството

$$\sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_k) + \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \nu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_k) = 1$$

е удовлетворено, само когато за всяко $x \in X$, $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ или $\nu_A(x) \neq \nu_B(x)$.

Следната дефиниция от дисертацията, също е дадена от автора в [65]. Използвайки ИР-индикатор на включване, изразяваме някои връзки на взаимно включване относно стандартната и π -наредбата на две ИРМ.

Дефиниция 10 Нека вземем две $A, B \in IFS(X)$ и дефинираме

1. Степенята, с която A е равно на B ,
 $\iota_=(A, B) = \frac{|j(A,B)(\varepsilon_{eq})|}{|X|}$
2. Степенята, с която A е $\leq$ -включено в B ,
 $\iota_{\leq}(A, B) = \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_0) + \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\square) + \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\diamond) + \iota_=(A, B)$
3. Степенята, с която A е строго $\leq$ -включено в B ,
 $\iota_{<}(A, B) = \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_0) + \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\square) + \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\diamond)$
4. Степенята, с която A е $\preceq_\pi$ -включено в B ,
 $\iota_{\preceq_\pi}(A, B) = \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\pi) + \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\square) + \nu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\diamond) + \iota_=(A, B)$
5. Степенята, с която A е строго $\preceq_\pi$ -включено в B ,
 $\iota_{\prec_\pi}(A, B) = \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\pi) + \mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\square) + \nu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_\diamond)$

От (2.13) следва, че за всяко $\rho \in \{\leq, <, \preceq_\pi, \prec_\pi, =\}$,

$$\iota_\rho : IFS(X) \times IFS(X) \longrightarrow [0, 1]. \quad (2.14)$$

Тоест , ι_ρ за всяко $\rho \in \{\leq, <, \preceq_\pi, \prec_\pi, =\}$, води до оценка на стандартно РМ.

Забележка 9 Индикаторът $\iota_=_$ може да бъде изразен по следния начин

$$\iota_=(A, B) = 1 - \left(\sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \mu_{\iota(A, B)}(\varepsilon_k) + \sum_{k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}} \nu_{\iota(A, B)}(\varepsilon_k) \right).$$

Не особено трудно се проверява и следната теорема.

Теорема 10 За всеки $A, B \in \text{IFS}(X)$ са в сила следните отношения,

$$\iota_{\leq}(A, B) = 1 \text{ iff } A \leq B$$

и

$$\iota_{\leq}(A, B) = 0 \text{ iff } \iota_{<}(B, A) = 1 \text{ iff } B < A$$

2.2.3 Заключение

В тази Глава въведохме множество мерки за включване на две ИРМ едно в друго, относно двете основни частични наредби за ИРМ. Тези мерки на включване са разгледани на две нива. От теоретико-множествена гледна точка, чрез въвеждането на

$$j: \text{IFS}(X) \times \text{IFS}(X) \longrightarrow \text{Split}(U_j, X),$$

където $\text{Split}(U_j, X)$ съответства на фамилията от релациите на еквивалентност в X с най-много 9 класа на еквивалентност. Най-важният от практична гледна точка ИР-индикатор на включване

$$\iota: \text{IFS}(X) \times \text{IFS}(X) \longrightarrow \text{IFS}(U_\iota),$$

е въведен в Дефиниция 9. Областта от стойности за този ИР-индикатор на включване е фамилията от ИРМ върху специален универсум U_ι .

Глава 3

Околности и насочени околности

В контекста на ИРМ са въведени множество мерки за разстояние, много от които съответстват на конкретни мерки за разстояние, вече въведени за РМ. Отправната точка тук ще е стандартната дефиниция за околност в метрично пространство (вземайки база от отворени кълба, за конструирането на топологично метрично пространство) в рамките на вече предложените метрики за ИРМ. Авторът въвежда нов тип от околности, наречени ИР-околност и ИР-кълбо, съответно. Дадени са няколко теореми и връзки със стандартните метрични околности. Прилагаме приложение на разработената теория и дефиниции, използвайки разширените модални оператори за ИРМ (вж. Раздел 1.5).

3.1 Метрични пространства и околности

Един от най-широко разпространените топологични пространства, са тези в които може да се дефинира понятието за разстояние или метрика между обектите в него.

В следващите редове, нека $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ да обозначава множеството от подмножества на X за кое да е дадено в класическия смисъл множество X .

Дефиниция 11 ([7, 55]) *Метрика или Разстояние върху дадено в класическия смисъл множество X е функция $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ със следните свойства:*

1. $d(x, y) \geq 0$ за всеки $x, y \in X$, и равенството е изпълнено iff $x = y$ (неотрицателност);
2. $d(x, y) = d(y, x)$ за всеки $x, y \in X$ (симетричност);
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ за всеки $x, y, z \in X$ (неравенство на триъгълника).

Наричаме $d(x, y)$ **разстояние** между x и y , а двойката (X, d) наричаме **метрично пространство**.

Очевидно е, че d има очакваните свойства, когато мерим разстояние между точки в твърди/недеформируеми тела (фигури) в $\mathbb{R}^n$, за кое да е цяло положително число n . Нека чрез следната дефиниция припомним някои от най-често използваните метрики в реалното метрично пространство.

Дефиниция 12 ([55]) *Нека вземем две произволни $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, нека дефинираме:*

1. **Евклидова метрика:**

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

2. **Манхатснова или метрика на Хеминг:**

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

3. **тах-метрика или метрика на Чебишев:**

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \overline{1, n}\}$$

Дефиниция 13 ([55]) Нека (X, d) да е метрично пространство. Тогава d -отворено кълбо (за кратко само отворено кълбо) с радиус ε , и с център в $x \in X$, се дефинира чрез:

$$\mathcal{B}(x, d, \varepsilon) = \{y \mid y \in X \ \& \ d(x, y) < \varepsilon\}$$

а съответното затворено кълбо се дефинира чрез:

$$\overline{\mathcal{B}}(x, d, \varepsilon) = \{y \mid y \in X \ \& \ d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Дефиниция 14 Нека вземем $\mathbb{R}^2$ за универсум $\xi_1, \xi_2 > 0$, тогава отворената (ξ_1, ξ_2) -околност, с център в $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, се дефинира чрез:

$$\mathcal{B}(x, \xi) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^2 \ \& \ |x_1 - y_1| < \xi_1 \ \& \ |x_2 - y_2| < \xi_2\},$$

а съответната затворена (ξ_1, ξ_2) -околност се дефинира чрез:

$$\overline{\mathcal{B}}(x, \xi) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^2 \ \& \ |x_1 - y_1| \leq \xi_1 \ \& \ |x_2 - y_2| \leq \xi_2\}.$$

Нека дадем дефинициите на основните метрики за ИРМ ([90, 92]).

– **Разстояние на Хеминг** (във вида на Szmidt и Kasprzyk):

$$l_{3, \text{IFS}}(A, B) = \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|)$$

– **Евклидово разстояние** (във вида на Szmidt и Kasprzyk):

$$e_{3, \text{IFS}}(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^2 + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

Нека дадем и съответните нормализирани версии на горните метрики.

– **нормализирано разстояние на Хеминг:**

$$L_{3, \text{IFS}}(A, B) = \frac{1}{2n} l_{3, \text{IFS}}(A, B)$$

– **нормализирано Евклидово разстояние:**

$$E_{3, \text{IFS}}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{2n}} e_{3, \text{IFS}}(A, B) \quad (3.2)$$

Съответните разстояния на горedefинираните, но използвайки трите параметъра на ИРМ, т.е. включвайки и степента на неопределеност, могат да се намерят в книгата на К. Атанасов

[11].

– разстояние на Хеминг:

$$l_{2,\text{IFS}}(A, B) = \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)$$

– Евклидово разстояние :

$$e_{2,\text{IFS}}(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Нека дадем и нормализираните версии на горе описаните разстояния.

– нормализирано разстояние на Хеминг:

$$L_{2,\text{IFS}}(A, B) = \frac{1}{2n} l_{2,\text{IFS}}(A, B)$$

– нормализирано Евклидово разстояние:

$$E_{2,\text{IFS}}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{2n}} e_{2,\text{IFS}}(A, B)$$

3.3 ИР-околности

Нека дефинираме ново понятие за околност за ИРМ. Следващата дефиниция е дадена от автора в [66]

Дефиниция 15 ([66]) Нека вземем универсума X , и нека $A, B \in \text{IFS}(X)$ и $\varepsilon \in [0, 1]$. Казваме, че:

- $\mathcal{B}_{IF}(A, d_j, \varepsilon) = \{B \mid B \in \text{IFS}(X) \ \& \ (\forall x \in X)(d_j(f_A(x), f_B(x)) < \varepsilon)\}$ е отворено ИР-кълбо с център A и радиус ε (вж. Дефиниция 13).
- $\overline{\mathcal{B}_{IF}}(A, d_j, \varepsilon) = \{B \mid B \in \text{IFS}(X) \ \& \ (\forall x \in X)(d_j(f_A(x), f_B(x)) \leq \varepsilon)\}$ е затворено ИР-кълбо с център A и радиус ε (вж. Дефиниция 13).

Аналогично нека дефинираме отворени и затворени ИР-околности

Дефиниция 16 ([66]) Нека вземем универсума X , и нека $A, B \in \text{IFS}(X)$, $\xi, \eta \in [0, 1]$.

- $\mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta) = \{B \mid B \in \text{IFS}(X) \ \& \ (\forall x \in X)(f_A(x) \in \mathcal{B}(f_B(x), \xi, \eta))\}$ е отворена (ξ, η) -ИР-околност с център A (вж. Дефиниция 14)
- $\overline{\mathcal{B}_{IF}}(A, \xi, \eta) = \{B \mid B \in \text{IFS}(X) \ \& \ (\forall x \in X)(f_A(x) \in \overline{\mathcal{B}}(f_B(x), \xi, \eta))\}$ е затворена ИР- (ξ, η) -околност с център A (вж. Дефиниция 14)

Нека изложим някои връзки между стандартните понятия за околност и горedefинираните ИР-околности.

Нека вземем X да е краен универсум и d_1, d_2, d_∞ са метриките в $\mathbb{R}^2$, дефинирани в предходния Раздел.

Следващите теореми са въведени от автора на дисертацията в [66].

Теорема 11 ([66]) Нека вземем $\varepsilon \in [0, 1]$. Тогава са в сила следните връзки между стандартни отворени кълба и ИР-кълба за ИРМ .

1. Ако $B \in \mathcal{B}_{IF}(A, d_1, \varepsilon)$ тогава $L_{2,IFS}(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$ т.е.

$$\mathcal{B}_{IF}(A, d_1, \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}(A, L_{2,IFS}, \frac{\varepsilon}{2})$$

2. Ако $B \in \mathcal{B}_{IF}(A, d_\infty, \varepsilon)$ тогава $L_{2,IFS}(A, B) < \varepsilon$ т.е. $\mathcal{B}_{IF}(A, d_\infty, \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}(A, L_{2,IFS}, \varepsilon)$

Аналогично се дефинират същите твърдения за затворени кълба, където неравенствата по-горе са строги.

Нека дадем някои връзки между стандартните околности и ИР-околностите за ИРМ.

Теорема 12 ([66]) Нека вземем $\xi, \eta \in [0, 1]$. Тогава са в сила следните отношения между стандартни отворени (затворени) околности и отворени (затворени) ИР-кълба по отношение на $L_{2,IFS}$.

1. Ако $B \in \mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta)$, то $L_{2,IFS}(A, B) < \frac{\xi+\eta}{2}$ т.е. $\mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta) \subseteq \mathcal{B}(A, L_{2,IFS}, \frac{\xi+\eta}{2})$

2. Ако $B \in \overline{\mathcal{B}_{IF}}(A, \xi, \eta)$, то $L_{2,IFS}(A, B) \leq \frac{\xi+\eta}{2}$ т.е. $\overline{\mathcal{B}_{IF}}(A, \xi, \eta) \subseteq \overline{\mathcal{B}}(A, L_{2,IFS}, \frac{\xi+\eta}{2})$

Теорема 13 ([66]) За всеки две $A, B \in IFS(X)$ е в сила следното неравенство.

$$L_{3,IFS}(A, B) \leq 2L_{2,IFS}(A, B)$$

Последната теорема ни казва, че за всяко $\varepsilon > 0$ имаме

$$\mathcal{B}(A, L_{2,IFS}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}(A, L_{3,IFS}, 2\varepsilon)$$

Теорема 14 ([66]) За всеки $\varepsilon, \xi, \eta \in [0, 1]$ са в сила следните теоретико-множествени включвания.

1. $\mathcal{B}_{IF}(A, d_1, \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}(A, L_{3,IFS}, \varepsilon)$ (вжс. Теорема 11)

2. $\mathcal{B}_{IF}(A, d_\infty, \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}(A, L_{3,IFS}, 2\varepsilon)$ (вжс. Теорема 11)

3. $\mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta) \subseteq \mathcal{B}(A, L_{3,IFS}, \xi + \eta)$ (вжс. Теорема 12)

3.4 Приложение на (разширените) модални оператори към ИР-околности

На Фиг. 3.1 могат да се видят регионите на действие на разширените модални оператори.

Нека наричаме A и B “ (ξ, η) -съседни”, когато:

$$\begin{cases} \sup_{y \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| \leq \xi \\ \sup_{y \in X} |\nu_A(x) - \nu_B(x)| \leq \eta \end{cases}$$

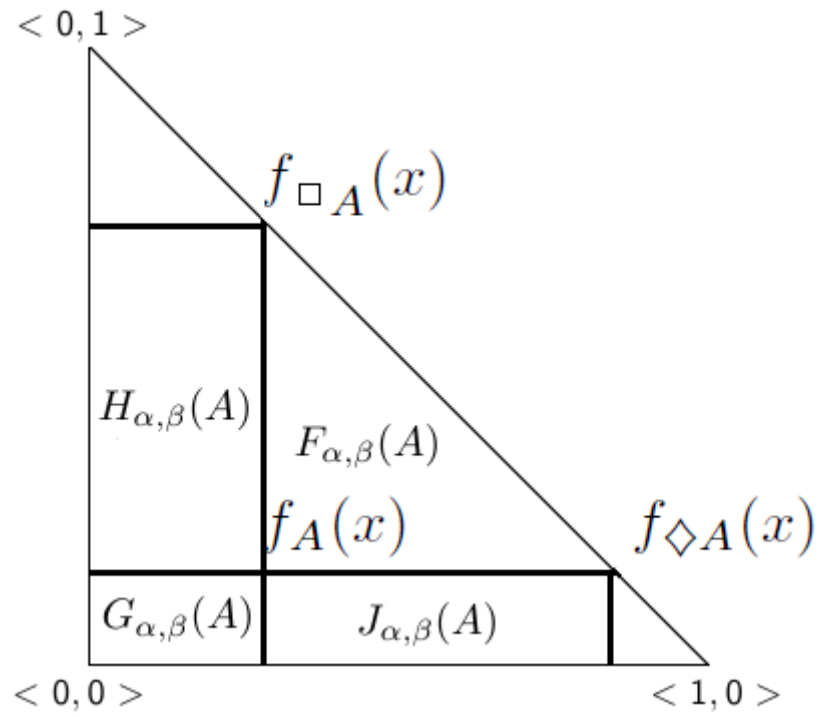
С други думи, A и B са “ (ξ, η) -съседни” iff $B \in \mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta)$.

Теорема 15 За всяко A и всеки две $\xi, \eta \in [0, 1]$:

1. A и $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}(A)$ са (ξ, η) -съседни iff

$$0 \leq \alpha \leq \min(1, \frac{\xi}{P_A}) \text{ and } 0 \leq \beta \leq \min(1, \frac{\eta}{P_A}),$$

където $\alpha + \beta \leq 1$;



Фигура 3.1: Триъгълно представяне на ИРМ $A \in \text{IFS}(X)$ в конкретна точка $x \in X$, където $f_A(x)$ е точката от повърхнината с координати $(\mu_A(x), \nu_A(x))$. $\Box A$ и $\Diamond A$ са двата модални оператора “необходимо” и “възможно” действащи върху A и останалите разширени модални оператори.

2. A и $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}(A)$ са (ξ, η) -свседни iff

$$0 \leq \alpha \leq \min(1, \frac{\xi}{K_A}) \text{ и } 0 \leq \beta \leq \min(1, \frac{\eta}{l_A});$$

3. A и $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(A)$ са (ξ, η) -свседни iff

$$0 \leq \alpha \leq \min(1, \frac{\xi}{K_A}) \text{ и } 0 \leq \beta \leq \min(1, \frac{\eta}{P_A});$$

4. A и $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}(A)$ са (ξ, η) -свседни iff

$$0 \leq \alpha \leq \min(1, \frac{\xi}{P_A}) \text{ и } 0 \leq \beta \leq \min(1, \frac{\eta}{l_A});$$

5. A и $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^*(A)$ са (ξ, η) -свседни iff

$$0 \leq \alpha \leq \min(1, \frac{\xi}{K_A}) \text{ и } 0 \leq \beta \leq \min(1, \frac{\eta}{\min(K_A, \xi) + P_A});$$

6. A и $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^*(A)$ са (ξ, η) -свседни iff

$$0 \leq \alpha \leq \min(1, \frac{\xi}{\min(l_A, \eta) + P_A}) \text{ и } 0 \leq \beta \leq \min(1, \frac{\eta}{l_A});$$

3.5 Насочени околности

В Раздел 3.5 са разширени понятията за ИР-околност и ИР-кълбо, като се въвеждат техни “насочени” версии: насочена ИР-околност и насочено ИР-кълбо. Също така, освен че са изследвани свойствата на новите насочени околности, са дадени връзките им с разширените модални оператори. Всички понятия и теореми свързани с насочени ИР-околности са изложени от автора в Marinov et al. [64].

Глава 4

Претопологични и топологични оператори за ИРМ

Две основни понятия ще се въведат и обсъдят в текущата Глава – претопологични и топологични оператори за ИРМ. Използваме частично гладки линейни изображения, за да въведем конкретни претопологични оператори за затваряне и отваряне за ИРМ. Много от резултатите тук са изложени в [70].

4.1 Кратки бележки за претопологични и топологични пространства

Нека дадем дефиницията на топологично и претопологично пространство чрез операторите на презатваряне/затваряне и преотваряне/отваряне. По-детайлно изложение и свойства на тези понятия могат да се намерят в книгите [7] and [4].

4.1.1 Претопологични и топологични оператори

Нека разгледаме базовия универсум X , който е множество в класическия смисъл. X е претопологично пространство по отношение на *презатварящия* оператор $\mathfrak{c} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, където $\mathcal{X}$ може да е $\mathcal{P}(X)$, $FS(X)$ или $IFS(X)$ iff за всеки две $A, B \in \mathcal{X}$ следните аксиоми са в сила (cf [7, Гл. 2.5], и [23]).

1. $\mathfrak{c}(\emptyset) = \emptyset$
2. $A \subseteq \mathfrak{c}(A)$
3. $\mathfrak{c}(A \cup B) = \mathfrak{c}(A) \cup \mathfrak{c}(B)$

В допълнение на горните аксиоми, ако операторът $\mathfrak{c}$ е *идемпотентен*, т.е. $\mathfrak{c}(A) = \mathfrak{c}(\mathfrak{c}(A))$, тогава $\mathfrak{c}$ се нарича оператор на *затваряне* в $\mathcal{X}$.

Дефиниция 24 (Неподвижна точка) Нека $f : Z \rightarrow Z$ е функция, където Z е множество в класическия смисъл. Тогава $z_0 \in Z$ се нарича *неподвижна точка*, ако $f(z_0) = z_0$.

Забележка 10 Операторът на презатваряне $\mathfrak{c}$ е *идемпотентен* iff за всяко $A \in \mathcal{X}$, $\mathfrak{c}(A)$ е неподвижна точка за $\mathfrak{c}$, т.е. $\mathfrak{c}(\mathfrak{c}(A)) = \mathfrak{c}(A)$.

Пример за идемпотентни оператори на затваряне са дадени от К. Атанасов. Техните дефиниции вече изложихме в предходните раздели - Раздел 1.3 и Раздел 1.4 .

Твърдение 10 Операторът на презатваряне $\mathbf{c}$ е ненамаляващ по отношение на частичната наредба $\subseteq$ в $\mathcal{X}$. Тоест, за всеки $A, B \in \mathcal{X}$ е изпълнено:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{c}(A) \subseteq \mathbf{c}(B).$$

Дефиниция 25 ([7], Гл. 2.5) За оператора на презатваряне $\mathbf{c}$ дефиниран върху $\mathcal{X}$ казваме, че $A \in \mathcal{X}$ е затворено множество iff $\mathbf{c}(A) = A$. Тоест, затворените множества са точно неподвижните точки относно $\mathbf{c}$ и

$$\tau^{\mathbf{c}} = \{A \mid A \in \mathcal{X} \ \& \ \mathbf{c}(A) = A\},$$

е топологията генерирана от презатварящия оператор $\mathbf{c}$. Ако $\mathcal{X}$ е $\mathcal{P}(X)$, $FS(X)$ и $IFS(X)$, тогава τ се нарича съответно класическа топология, размита топология и интуиционистки размита топология.

Аналогично на $\mathbf{c}$, дефинираме $\mathbf{i}$, операторът на преотваряне и на отваряне в $\mathcal{X}$. $\mathbf{i}$ е оператор на преотваряне, ако са в сила следните аксиоми (виж [7, Гл. 2.5]),

1. $\mathbf{i}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$
2. $\mathbf{i}(A) \subseteq A$
3. $\mathbf{i}(A \cap B) = \mathbf{i}(A) \cap \mathbf{i}(B)$

В допълнение на горните аксиоми, ако операторът $\mathbf{i}$ е идемпотентен, т.е. $\mathbf{i}(A) = \mathbf{i}(\mathbf{i}(A))$, тогава $\mathbf{i}$ се нарича оператор на отваряне в $\mathcal{X}$.

Твърдение 11 Операторът на преотваряне $\mathbf{i}$ е ненамаляващ по отношение на частичната наредба $\subseteq$ в $\mathcal{X}$. Тоест, за всеки две $A, B \in \mathcal{X}$, е изпълнено

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{i}(A) \subseteq \mathbf{i}(B).$$

Дефиниция 26 ([7, Гл. 2.5]) За оператора на преотваряне $\mathbf{i}$ дефиниран върху $\mathcal{X}$ казваме, че елементът $A \in \mathcal{X}$ е отворен iff $\mathbf{i}(A) = A$. Тоест, отворените множества са точно неподвижните точки относно $\mathbf{i}$ и

$$\tau_{\mathbf{i}} = \{A \mid A \in \mathcal{X} \ \& \ \mathbf{i}(A) = A\},$$

е топологията, генерирана от оператора на презатваряне $\mathbf{i}$. Ако $\mathcal{X}$ е $\mathcal{P}(X)$ или $IFS(X)$, тогава τ се нарича съответно класическа топология, размита топология или интуиционистки размита топология.

Всеки оператор на (пре)затваряне има свой съответстващ (т.нар. спрегнат) оператор на (пре)отваряне и обратно. Нека $\mathbf{c}$ да е презатварящ оператор в $\mathcal{X}$ и нека дефинираме,

$$\delta(A) := \neg \mathbf{c}(\neg A).$$

Тогава δ е преотварящ оператор в $\mathcal{X}$, т.е. за него са в сила аксиомите за преотваряне.

1. $\delta(X) = \neg \mathbf{c}(\neg X) = \neg \mathbf{c}(\emptyset) = \neg \emptyset = X$;
2. $\mathbf{c}(\neg A) \supseteq \neg A$ и следователно $A \supseteq \neg \mathbf{c}(\neg A) = \delta(A)$;
3. $\delta(A \cap B) = \delta(A) \cap \delta(B)$.

Аналогично, ако i е (пре)отварящ оператор, тогава $c(A) := \neg i(\neg A)$ е неговият съответен (пре)затварящ оператор. Разглеждаме двойките (пре)затварящ - (пре)отварящ оператори като спрегнати двойки оператори. Фамилията от отворени множества е съставена точно от допълненията на дефинираните по-горе затворени множества,

Твърдение 12 Ако i и c е спрегната двойка от преотварящ и презатварящ оператори в $\mathcal{X}$, тогава

$$\tau^c = \{\neg A \mid A \in \tau_i\} \text{ and } \tau_i = \{\neg B \mid B \in \tau^c\}.$$

4.1.2 Претопологични и топологични оператори за РМ

В [71] авторът дава примери за размити претопологични и топологични пространства. В Раздел 4.1.2 от дисертацията са изложени понятията в класическия размит случай, като впоследствие се обобщават за ИР претопологии и топологии.

4.2 Частично гладки линейни (пре)топологични оператори

В Раздел 4.2 от дисертацията обобщаваме понятията за оператора на (пре)отваряне и (пре)затваряне за ИРМ от Раздел 4.1.2 и показваме, че в ИР смисъл те са много по-богат извор за изследователска дейност.

Преотварящ оператор $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$

Аксиомите за ИР преотварящ оператор са както следва:

$$i : IFS(X) \longrightarrow IFS(X)$$

е преотварящ оператор, ако за всеки две $A, B \in IFS(X)$, са в сила

1. $i(E_X^*) = E_X^*$
2. $i(A) \subseteq A$
3. $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$

Нека въведем преотварящия оператор $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$ показан на Фиг. 4.3, като за всеки две $\alpha, \beta \in [0, 1]$ понякога ще искаме да са изпълнени следните неравенства,

$$0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta \leq 1 \text{ и } 0 \leq \gamma_\alpha, \gamma_\beta \leq 1. \quad (4.15)$$

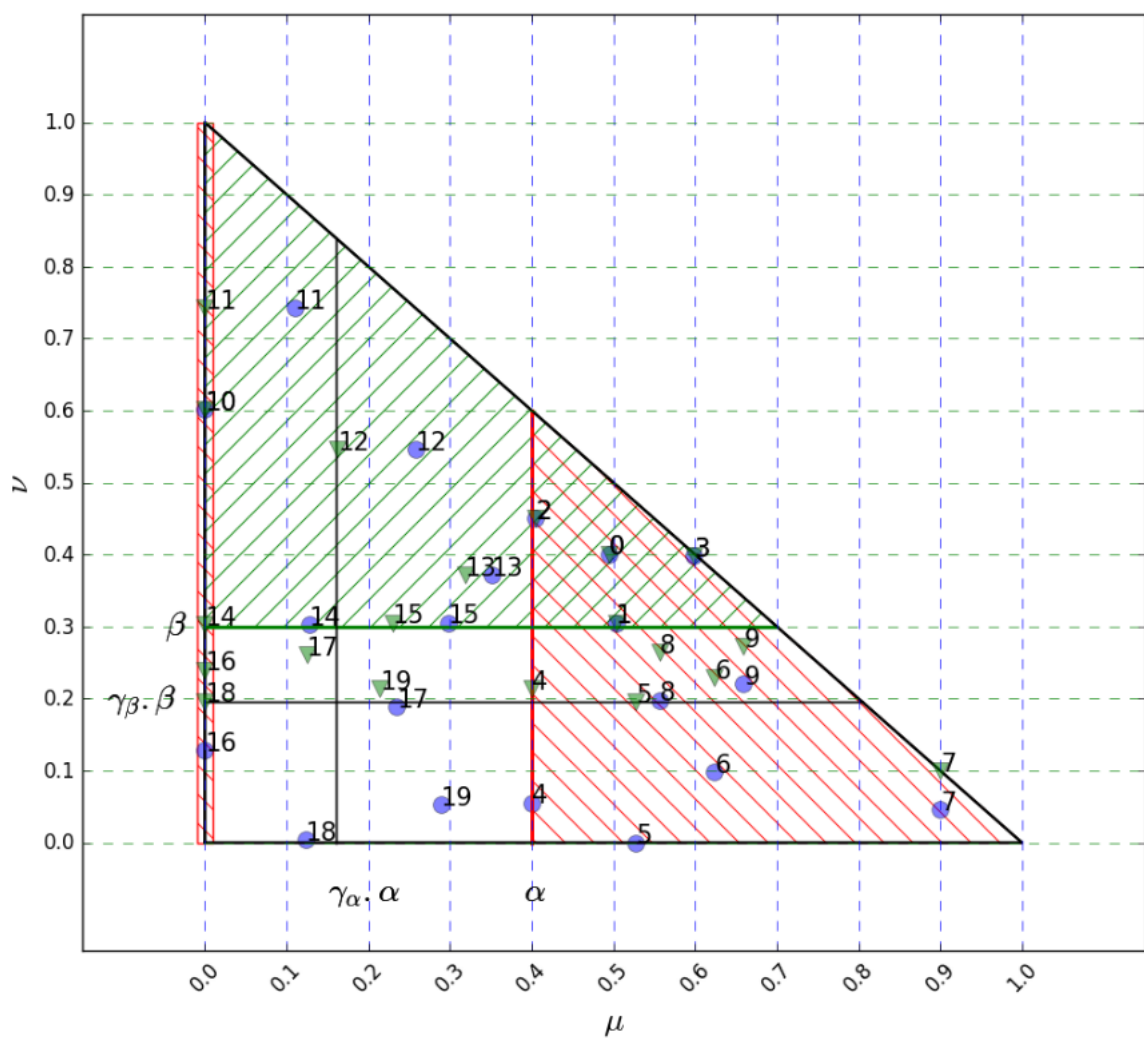
Дефиниция 27 За $\alpha, \beta, \gamma_\alpha, \gamma_\beta \in [0, 1]$ дефинираме

$$\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta} : IFS(X) \longrightarrow IFS(X),$$

така че

$$\mu_{\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \mu_A(x) < \gamma_\alpha \cdot \alpha \\ \frac{1}{1-\gamma_\alpha}(\mu_A(x) - \alpha) + \alpha & \text{при } \gamma_\alpha \cdot \alpha \leq \mu_A(x) < \alpha \\ \mu_A(x) & \text{при } \alpha \leq \mu_A(x) \leq 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\nu_{\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)}(x) = \begin{cases} \min((1 - \gamma_\beta)\nu_A(x) + \beta\gamma_\beta, 1 - \mu_{\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)}(x)) & \text{при } 0 \leq \nu_A(x) \leq \beta \\ \nu_A(x) & \text{при } \beta < \nu_A(x) \leq 1 \end{cases} \quad (4.17)$$



Фигура 4.3: Пример на действието на преотварящия оператор $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}}$ върху $A \in IFS(X)$, визуализиран чрез сините кръгчета.

На Фиг. 4.3 е визуализирано действието на оператора на отваряне върху фиксирано ИРМ A .

Тъй като $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}$ се оказва изключително важен частен случай на преотварящ оператор, нека напишем отделно дефиницията

$$\mu_{\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}(A)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \mu_A(x) < \alpha \\ \mu_A(x) & \text{при } \alpha \leq \mu_A(x) \leq 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\nu_{\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}(A)}(x) = \begin{cases} \min(\beta, 1 - \mu_{\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}(A)}(x)) & \text{при } 0 \leq \nu_A(x) \leq \beta \\ \nu_A(x) & \text{при } \beta < \nu_A(x) \end{cases} \quad (4.23)$$

Теорема 16 $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}$ е идемпотентен, т.е. за $A \in IFS(X)$, $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}(A)$ е неподвижна точка на $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}$. Това означава, че $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{1,1}$ е преотварящ оператор, удовлетворяващ условието за оператор на отваряне.

Презатварящ оператор $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$

Аксиомите за ИР презатварящ оператор са както следва:

$$\mathfrak{c} : IFS(X) \longrightarrow IFS(X)$$

е презатварящ оператор, ако за всеки две $A, B \in IFS(X)$, са в сила

1. $\mathfrak{c}(O_X^*) = O_X^*$
2. $A \subseteq \mathfrak{c}(A)$
3. $\mathfrak{c}(A \cup B) = \mathfrak{c}(A) \cup \mathfrak{c}(B)$

В допълнение, ако $\mathfrak{c}$ е идемпотентен, тогава той се нарича *интуиционистки размит затварящ* оператор.

Нека въведем презатварящия ИР оператор $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$, показан на Фиг. 4.4, като понякога ще искаме да са изпълнени условията (4.15).

Дефиниция 28 За $\alpha, \beta, \gamma_\alpha, \gamma_\beta \in [0, 1]$ дефинираме

$$\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta} : IFS(X) \longrightarrow IFS(X),$$

$$\nu_{\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \nu_A(x) < \gamma_\alpha \cdot \alpha \\ \frac{1}{1-\gamma_\alpha}(\nu_A(x) - \alpha) + \alpha & \text{при } \gamma_\alpha \cdot \alpha \leq \nu_A(x) < \alpha \\ \nu_A(x) & \text{при } \alpha \leq \nu_A(x) \leq 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

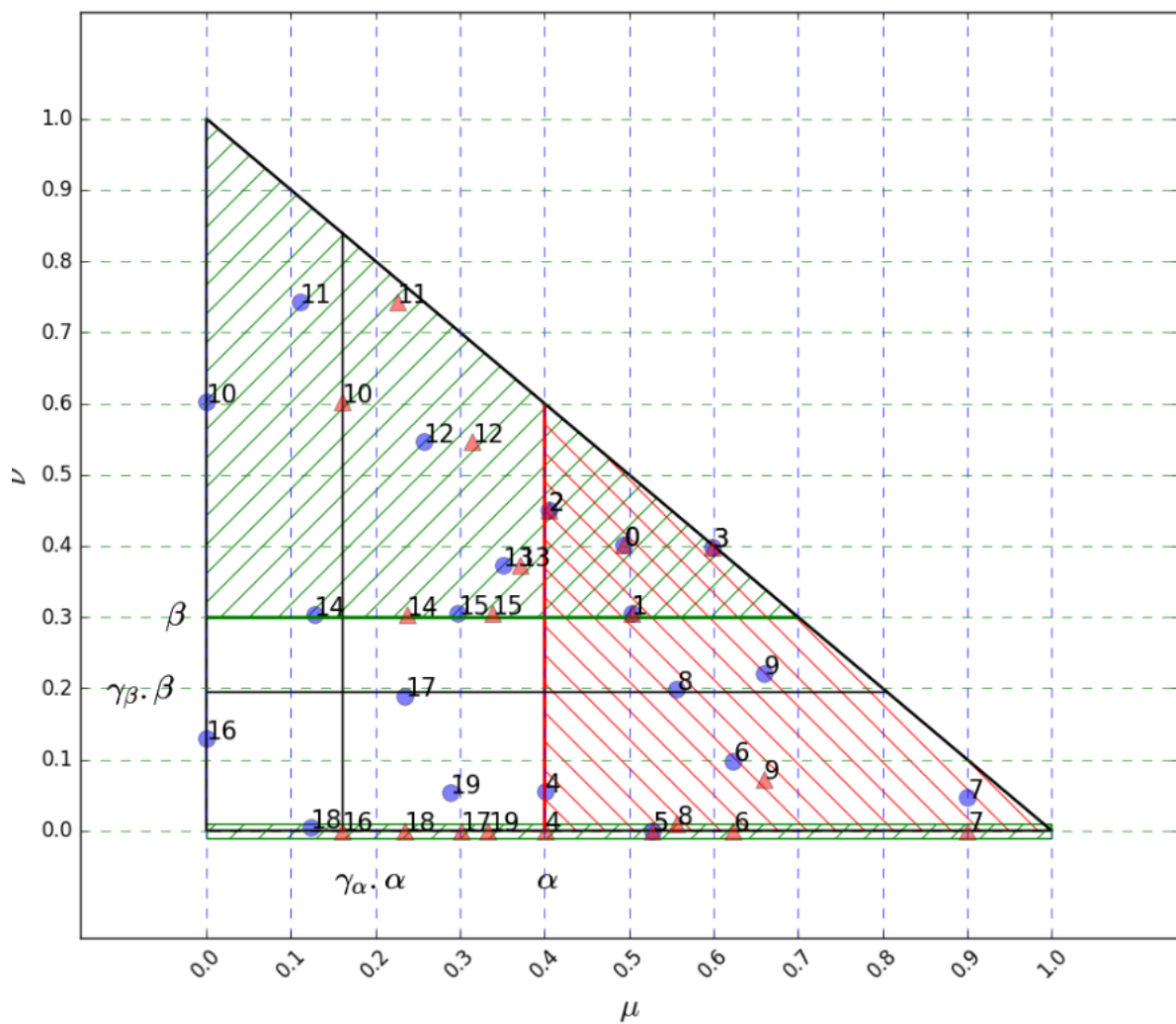
$$\mu_{\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)}(x) = \begin{cases} \min((1 - \gamma_\beta)\mu_A(x) + \beta\gamma_\beta, 1 - \nu_{\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)}(x)) & \text{при } 0 \leq \mu_A(x) \leq \beta \\ \mu_A(x) & \text{при } \beta < \mu_A(x) \leq 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

Действието на презатварящия оператор $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$ е изобразено на Фиг. 4.4 за фиксирано ИРМ A .

Следните теореми са въведени от автора и могат да се намерят в [70].

Теорема 17 За всеки две $\alpha, \beta \in [0, 1]$ и $\gamma_\alpha, \gamma_\beta \in (0, 1]$ е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta})^n = \mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{1,1}$ и следователно $\tau_{\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}} = \tau_{\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{1,1}}$.

Теорема 18 $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{1,1}$ е идемпотентен, т.е. $A \in IFS(X)$, $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{1,1}(A)$ е неподвижна точка на $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{1,1}$. Това означава, че операторът удовлетворява условието за ИР затварящ оператор.



Фигура 4.4: Пример на действието на презатварящ оператор $\mathcal{C}_{\nu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}$ върху $A \in IFS(X)$, визуализиран чрез сините кръгчета.

4.3 Обобщение на ИР (пре)топологичните оператори и техни свойства

В този раздел обобщаваме всички типове (пре)затварящи и (пре)отварящи оператори за ИРМ, дефинирани в предходния Раздел 4.2.

Нека първо въведем фамилия от спомагателни функции, които ще бъдат използвани за въвеждане на общия вид на (пре)топологичните оператори.

Спомагателни непрекъснати функции

Първата фамилия от спомагателни функции са непрекъснати. Те са два типа: горни за презатварящите и съответно долни за преотварящите оператори (виж Фиг. 4.5).

Нека вземем,

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ с } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1, \gamma_{\alpha} \in [0, 1]$$

Тогава горната спомагателна функция има вида,

$$g_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq \alpha_1 \\ \frac{1}{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t - \alpha_1) + \alpha_1 & \text{при } \alpha_1 < t \leq \alpha_1 + \gamma_{\bar{\alpha}}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \alpha_2 & \text{при } \alpha_1 + \gamma_{\bar{\alpha}}(\alpha_2 - \alpha_1) < t \leq \alpha_2 \\ t & \text{при } \alpha_2 < t \leq 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

А долната спомагателна функция има вида,

$$f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t < \alpha_1 \\ \alpha_1 & \text{при } \alpha_1 \leq t < \alpha_1 + \gamma_{\bar{\alpha}}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \frac{1}{1-\gamma_{\bar{\alpha}}}(t - \alpha_2) + \alpha_2 & \text{при } \alpha_1 + \gamma_{\bar{\alpha}}(\alpha_2 - \alpha_1) \leq t < \alpha_2 \\ t & \text{при } \alpha_2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

Следната теорема е изключително важна, т.к. впоследствие от нея почти директно ще следва спрегнатостта на операторите на отваряне и затваряне.

Теорема 19 *За вече дефинираните спомагателни функции $f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t)$ и $g_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t)$, е в сила*

$$g_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = 1 - f_{(1-\alpha_2, 1-\alpha_1)}^{1-\gamma_{\bar{\alpha}}}(1-t),$$

Или, ако направим субституцията $\bar{\beta} = (1 - \alpha_2, 1 - \alpha_1)$ и $\gamma_{\bar{\beta}} = 1 - \gamma_{\bar{\alpha}}$, горното уравнение приема следния вид,

$$g_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = 1 - f_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}(1-t).$$

Спомагателни функции със скокове

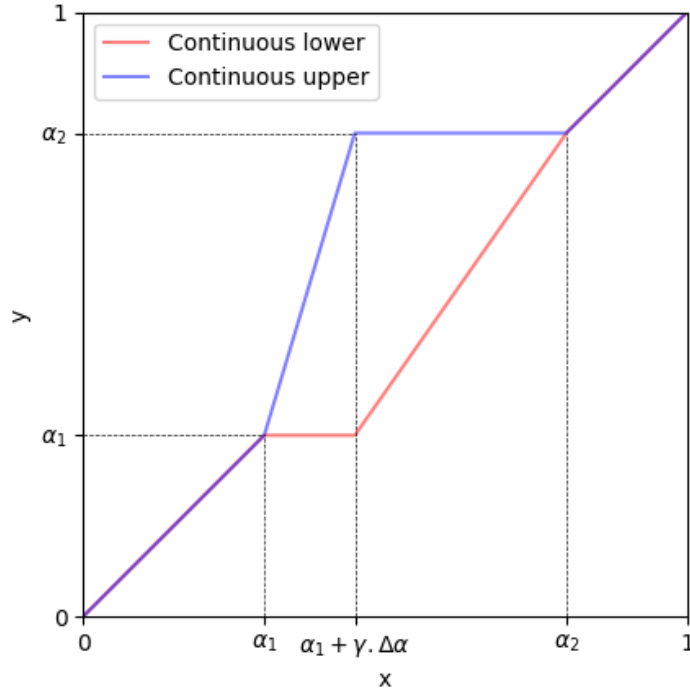
Втората фамилия от спомагателни функции не са непрекъснати, а със скокове. Те също са два типа: горни за презатварящите и долни за преотварящите оператори (вж. Фиг. 4.6).

Нека вземем,

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ с } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1, \gamma_{\alpha} \in [0, 1]$$

Тогава горната спомагателна функция има вида,

$$G_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq \alpha_1 \\ (1 - \gamma_{\bar{\alpha}})(t - \alpha_2) + \alpha_2 & \text{при } \alpha_1 < t \leq \alpha_2 \\ t & \text{при } \alpha_2 < t \leq 1 \end{cases} \quad (4.32)$$



Фигура 4.5: Фамилия от непрекъснати спомагателни функции.

А долната спомагателна функция има вида,

$$F_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t < \alpha_1 \\ (1 - \gamma_{\bar{\alpha}})t + \gamma_{\bar{\alpha}}\alpha_1 & \text{при } \alpha_1 \leq t < \alpha_2 \\ t & \text{при } \alpha_2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.33)$$

Аналогично на бележките преди Теорема 19 ще изложим и следната,

Теорема 20 За горedefинираните спомагателни функции със скокове $F_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t)$ и $G_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t)$, е в сила

$$G_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = 1 - F_{(1-\alpha_2, 1-\alpha_1)}^{1-\gamma_{\bar{\alpha}}}(1-t),$$

Или, ако вземем субституцията $\bar{\beta} = (1 - \alpha_2, 1 - \alpha_1)$ и $\gamma_{\bar{\beta}} = 1 - \gamma_{\bar{\alpha}}$ горното уравнение приема следния вид,

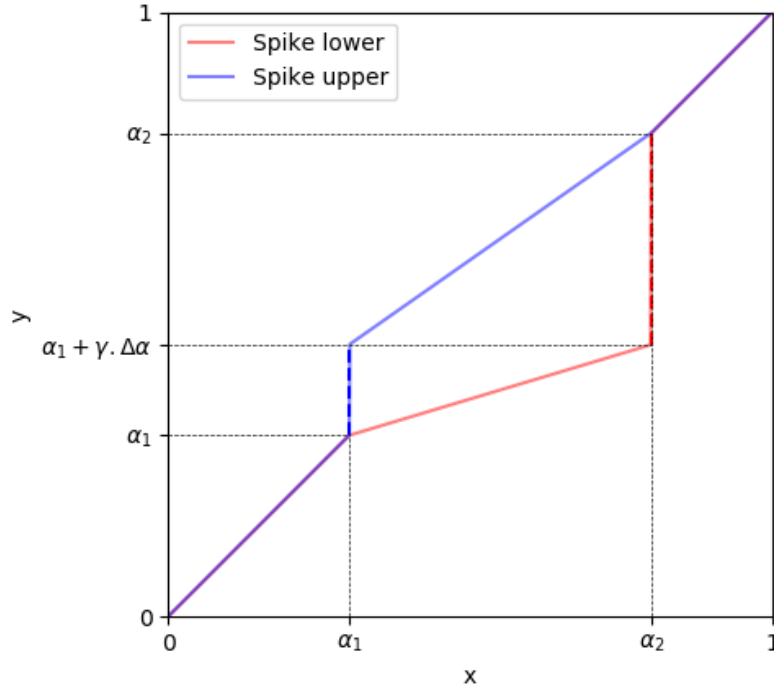
$$G_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}(t) = 1 - F_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}(1-t).$$

Обобщени ИР претопологични оператори

Тук даваме по-общата дефиниция на преотварящи и презатварящи оператори, базирани на спомагателните функции, които вече дефинирахме.

За дефинирането на ИР презатварящ оператор $\mathcal{I}$, както описахме в Раздел 4.2, ни трябва две изображения

$$f, g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1],$$



Фигура 4.6: Фамилията от спомагателни функции със скокове.

такива че

$$i = (f, g) : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2 \text{ and } (\forall x)(x \in X \Rightarrow f(x) + g(x) \leq 1)$$

удовлетворяват аксиомите относно метриката в ИР-триъгълник. Тоест, за всеки две $t_1, t_2 \in [0, 1]$, трябва да са в сила

1. $f(1) = 1$ и $g(0) = 0$
2. $f(t_1) \leq t_1$ и $g(t_1) \geq t_1$
3. $\begin{cases} f(\min(t_1, t_2)) = \min(f(t_1), f(t_2)) \\ g(\max(t_1, t_2)) = \max(g(t_1), g(t_2)) \end{cases}$

В дисертацията е показано, че въведените спомагателни функции (непрекъснати и със скокове) удовлетворяват горните условия.

Дефиниция 29 (Обобщени ИР преотварящи оператори) *Нека вземем*

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \text{ като } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1, \gamma_{\alpha} \in [0, 1]$$

и

$$\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2), \text{ като } 0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1, \gamma_{\beta} \in [0, 1]$$

както и $f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, g_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}$ (спомагателните непрекъснати функции), $F_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, G_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}$ (спомагателните функции със скокове). Ако $f \in \{f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, F_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}\}$ и $g \in \{g_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}, G_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}\}$, тогава нека дефинираме

$$\mathcal{I}_{\mu}(f, g) = (f, \min(g, 1 - f)) : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2$$

и

$$\mathcal{I}_\nu(f, g) = (\min(f, 1 - g), g) : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2.$$

На база горedefинираните $\mathcal{I}_\mu(f, g)$ и $\mathcal{I}_\nu(f, g)$, нека вземем съответната композиция със степените на принадлежност и непринадлежност на произволно избрано ИРМ A . Тоест,

$$\mathcal{I}_\mu(f \circ \mu, g \circ \nu) : IFS(X) \longrightarrow IFS(X) \quad (4.34)$$

и

$$\mathcal{I}_\nu(f \circ \mu, g \circ \nu) : IFS(X) \longrightarrow IFS(X) \quad (4.35)$$

са добре дефинирани оператори с дефиниционна област $IFS(X)$ и област от стойности също $IFS(X)$. От тяхната структура и бележките непосредствено преди Дефиницията, следва че $\mathcal{I}_\mu(f \circ \mu, g \circ \nu)$ и $\mathcal{I}_\nu(f \circ \mu, g \circ \nu)$ са добре дефинирани **ИР преотварящи оператори**. Нещо повече, поради всички възможни комбинации на избор на функциите f and g всъщност дефинирахме 8 различни фамилии от преотварящи оператори.

Забележка 15 Теорема 19 и Теорема 20 ни казват, че всичките осем фамилии от презатварящи оператори от Дефиниция 29 могат да бъдат дефинирани само на база на $f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}$ (4.31) и $F_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}$ (4.33).

Аналогично на последните дефиниции и теореми относно обобщените ИР преотварящи оператори имаме техните еквиваленти за презатварящи оператори.

Дефиниция 30 (Обобщени ИР презатварящи оператори) Нека вземем

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \text{ като } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1, \gamma_{\alpha} \in [0, 1]$$

и

$$\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2), \text{ като } 0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1, \gamma_{\beta} \in [0, 1],$$

както и съответните спомагателни функции $f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, g_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, F_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, G_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}$. Ако $f \in \{f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, F_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}\}$ и $g \in \{g_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}, G_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}\}$, тогава нека дефинираме

$$C_\mu(g, f) = (g, \min(f, 1 - g)) : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]^2$$

и

$$C_\nu(g, f) = (\min(g, 1 - f), f) : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]^2.$$

На база горedefинираните $C_\mu(g, f)$ и $C_\nu(g, f)$, нека вземем съответните композиции със степените на принадлежност и непринадлежност на произволно ИРМ A . Тоест,

$$C_\mu(g \circ \mu, f \circ \nu) : IFS(X) \longrightarrow IFS(X) \quad (4.36)$$

и

$$C_\nu(g \circ \mu, f \circ \nu) : IFS(X) \longrightarrow IFS(X) \quad (4.37)$$

са добре дефинирани оператори с дефиниционна област $IFS(X)$ и област от стойности също $IFS(X)$. От тяхната структура следва, че $C_\mu(g \circ \mu, f \circ \nu)$ и $C_\nu(g \circ \mu, f \circ \nu)$ са добре дефинирани **ИР презатварящи оператори**. И тук отново, поради всички възможни комбинации на избор на функциите f и g всъщност дефинирахме 8 различни фамилии от презатварящи оператори.

Теорема 21 (Взаимна спрегнатост на ИР топологични оператори) Ако $f \in \{f_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}, F_{\bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}}\}$ и $g \in \{g_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}, G_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}\}$, тогава следните двойки преотварящи и презатварящи оператори са взаимно спрегнати :

$$\mathcal{I}_{\mu}(f \circ \mu, g \circ \nu) \text{ и } \mathcal{C}_{\nu}(g \circ \mu, f \circ \nu),$$

$$\mathcal{I}_{\nu}(f \circ \mu, g \circ \nu) \text{ и } \mathcal{C}_{\mu}(g \circ \mu, f \circ \nu).$$

Тоест, за всяко $A \in IFS(X)$ е изпълнено

$$\mathcal{C}_{\nu}(g \circ \mu, f \circ \nu)(A) = \neg \mathcal{I}_{\mu}(f \circ \mu, g \circ \nu)(\neg A),$$

$$\mathcal{C}_{\mu}(g \circ \mu, f \circ \nu)(A) = \neg \mathcal{I}_{\nu}(f \circ \mu, g \circ \nu)(\neg A).$$

Твърдение 13 Операторите $\mathcal{I}_{\mu; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}, \gamma_{\bar{\beta}}}$ и $\mathcal{C}_{\nu; \bar{\beta}, \bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\beta}}, \gamma_{\bar{\alpha}}}$ са обобщения на съответните оператори $\mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}}$ и $\mathcal{C}_{\nu; \beta, \alpha}^{\gamma_{\beta}, \gamma_{\alpha}}$ дефинирани в Раздел 4.2.

Доказателство Достатъчно е да вземем $\bar{\alpha} = (0, \alpha)$, $\bar{\beta} = (0, \beta)$, $\gamma_{\bar{\alpha}} = \gamma_{\alpha}$, $\gamma_{\bar{\beta}} = \gamma_{\beta}$ и валидността на твърдението следва директно от дефинициите на съответните оператори.

Нека покажем сега, че операторите дефинирани в тази глава са също обобщения на тези, дефинирани от К. Атанасов в [13, Гл. 4.2].

Твърдение 14 Операторите $\mathcal{I}_{\mu; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}, \gamma_{\bar{\beta}}}$ и $\mathcal{C}_{\nu; \bar{\beta}, \bar{\alpha}}^{\gamma_{\bar{\beta}}, \gamma_{\bar{\alpha}}}$ са обобщения на съответните оператори $\mathcal{I}$ от (1.23) и $\mathcal{C}$ от (1.20).

Доказателство Нека вземем произволно $A \in IFS(X)$. За да докажем валидността на твърдението за отварящите оператори, достатъчно е да вземем $\bar{\alpha} = (k_A, 1)$, $\gamma_{\bar{\alpha}} = 1$ и $\bar{\beta} = (0, l_A)$, $\gamma_{\bar{\beta}} = 1$, т.е. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mu; (k_A, 1), (0, l_A)}^{1, 1}$. За да покажем валидността на твърдението за затварящите оператори е достатъчно да вземем $\bar{\alpha} = (0, K_A)$, $\gamma_{\bar{\alpha}} = 1$ и $\bar{\beta} = (L_A, 1)$, $\gamma_{\bar{\beta}} = 1$, т.е. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\nu; (0, K_A), (L_A, 1)}^{1, 1}$.

Твърдение 15 Операторът $\mathcal{I}_{\mu; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}, \gamma_{\bar{\beta}}}$ е обобщение на операторите $\mathcal{I}_{\mu}$ от (1.28) и $\mathcal{I}_{\nu}$ от (1.29).

Доказателство Нека вземем произволно $A \in IFS(X)$. От дефинициите на съответните оператори следва, че $\mathcal{I}_{\mu} = \mathcal{I}_{\mu; (k_A, 1), (0, 0)}^{1, 1}$ и $\mathcal{I}_{\nu} = \mathcal{I}_{\mu; (1-l_A, 1), (0, l_A)}^{1, 1}$.

Твърдение 16 Операторът $\mathcal{C}_{\nu; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\alpha}}, \gamma_{\bar{\beta}}}$ е обобщение на операторите $\mathcal{C}_{\mu}$ от (1.26) и $\mathcal{C}_{\nu}$ от (1.27).

Доказателство Нека вземем произволно $A \in IFS(X)$. От дефинициите на съответните оператори следва, че $\mathcal{C}_{\mu} = \mathcal{C}_{\mu; (0, K_A), (1-K_A, 1)}^{1, 1}$ и $\mathcal{C}_{\nu} = \mathcal{C}_{\mu; (0, 0), (L_A, 1)}^{1, 1}$.

Глава 5

Свойства на (пре)топологичните оператори

В Глава 5 даваме важни връзки между ИР (пре)топологичните оператори и другите понятия, които дефинирахме в предходните Раздел 2.1, Раздел 2.2, Раздел 3 и Глава 4.

5.1 ИР (пре)топологични оператори и ИР околности

В тази глава ще изследваме по-детайлно взаимовръзките между ИР (пре)топологични оператори с ИР околности.

Твърдение 17 Нека вземем $A \in IFS(X)$ и операторът на преотваряне $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$, където $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta \leq 1$ и $0 \leq \gamma_\alpha, \gamma_\beta \leq 1$ в съответствие с (4.15). Тогава минималната (ξ, η) -околност $\mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta)$, съдържаща образа на A , $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)$, се дава от следните уравнения

$$\xi = \max\left(\max_{x \in \mu_A^{-1}[0, \gamma_\alpha)} \mu_A(x), \max_{x \in \mu_A^{-1}[\gamma_\alpha, \alpha)} \frac{\gamma}{1 - \gamma} [-\mu_A(x) + \alpha]\right)$$

и

$$\eta = \max\{S, T\},$$

където

$$T = \max_{x \in \nu_A^{-1}[0, \beta] \cap \mu_A^{-1}[0, 1 - \beta]} \{(-\gamma_\beta)\nu_A(x) + \beta\gamma_\beta\},$$

и

$$S = \max_{x \in \nu_A^{-1}[0, \beta] \cap \mu_A^{-1}[1 - \beta, 1]} (\min(-\gamma_\beta)\nu_A(x) + \beta\gamma_\beta, 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)).$$

Нещо повече,

$$(\forall A \in IFS(X)) (\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A) \in \mathcal{B}_{IF,>}(A, \xi, \eta) \subseteq \mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta)).$$

Аналогично на Твърдение 17, нека дадем и неговото съответствие за претатварящите оператори.

Твърдение 18 Нека вземем $A \in IFS(X)$ и претатварящия оператор $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$, където $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta \leq 1$ и $0 \leq \gamma_\alpha, \gamma_\beta \leq 1$ в съответствие с (4.15). Тогава минималната (ξ, η) -околност $\mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta)$, съдържаща образа на A , $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)$, се дава от следните уравнения

$$\eta = \max\left(\max_{x \in \nu_A^{-1}[0, \beta\gamma_\beta)} \nu_A(x), \max_{x \in \nu_A^{-1}[\beta\gamma_\beta, \beta)} \frac{\gamma_\beta}{1 - \gamma_\beta} [-\nu_A(x) + \beta]\right)$$

u

$$\xi = \max(S, T),$$

където

$$T = \max_{x \in \mu_A^{-1}[0, \alpha] \cap \nu_A^{-1}[0, 1 - \alpha]} ((-\gamma_\alpha)\mu_A(x) + \alpha\gamma_\alpha),$$

u

$$S = \max_{x \in \mu_A^{-1}[0, \alpha] \cap \nu_A^{-1}[1 - \alpha, 1]} (\min\{(-\gamma_\alpha)\mu_A(x) + \alpha\gamma_\alpha, 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)\}).$$

Нещо повече,

$$(\forall A \in IFS(X))(\mathcal{C}_{\nu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A) \in \mathcal{B}_{IF, <}(A, \xi, \eta) \subseteq \mathcal{B}_{IF}(A, \xi, \eta)).$$

5.2 ИР (пре)топологични оператори и индикатора на включване j

В тази глава ще изследваме по-детайлно взаимовръзките между ИР (пре)топологични оператори с индикаторите на включване.

В Дефиниция 7 въведохме теоретико-множествения индикатор на включване,

$$j: IFS(X) \times IFS(X) \longrightarrow Split(U_j, X),$$

чрез (2.11), където $Split(U_j, X)$ беше въведен в Дефиниция 6.

Твърдение 19 *За изображението j , $j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A)) \in Split(U_j, X)$ и $\alpha, \beta, \gamma_\alpha, \gamma_\beta \in [0, 1]$ имаме следната структура.*

1. За ε_{eq} :

$$\bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{eq}) = (\mu_A^{-1}\{0\} \cap \nu_A^{-1}[\beta, 1]) \cup (\mu_A^{-1}[\alpha, 1 - \beta] \cap \nu_A^{-1}[\beta, 1 - \alpha]).$$

2. За ε_0 :

$$\begin{aligned} \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{0, \mu}) &= \emptyset, \\ \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{0, \nu}) &= \nu_A^{-1}[0, \beta) \cap \mu_A^{-1}(0, \alpha). \end{aligned}$$

3. За ε_π :

$$\begin{aligned} \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\pi, \mu}) &= \emptyset \\ \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\pi, \nu}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

4. За $\varepsilon_\square$:

$$\begin{aligned} \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\square, \mu}) &= \emptyset, \\ \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\square, \nu}) &= \mu_A^{-1}(0, \alpha) \cap \nu_A^{-1}[\beta, 1]. \end{aligned}$$

5. За $\varepsilon_\diamond$:

$$\begin{aligned} \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\diamond, \mu}) &= \emptyset, \\ \bullet j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\diamond, \nu}) &= (\mu_A^{-1}\{0\} \cap \nu_A^{-1}[0, \beta)) \cup (\mu_A^{-1}[\alpha, 1] \cap \nu_A^{-1}[0, \beta)). \end{aligned}$$

5.4 ИР (пре)топологични оператори и Индикатор на включване ι

В Дефиниция 9 въведохме ИР индикатор на включване

$$\iota : \text{IFS}(X) \times \text{IFS}(X) \longrightarrow \text{IFS}(U_\iota)$$

като композицията на j и Val , т.е. $\iota = (Val \circ j)$, където

$$U_\iota = \{\varepsilon_0, \varepsilon_\pi, \varepsilon_\square, \varepsilon_\diamond\},$$

както е дефинирано в (2.9). И нещо повече, за всяко $k \in \{0, \pi, \square, \diamond\}$ и $A, B \in \text{IFS}(X)$ можем да напишем:

$$\mu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_k) = \frac{|j(A,B)(\varepsilon_{k,\mu})|}{|X|} \text{ и } \nu_{\iota(A,B)}(\varepsilon_k) = \frac{|j(A,B)(\varepsilon_{k,\nu})|}{|X|}.$$

Забележка 16 За ИР индикатор на включване ι , $\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A)) \in \text{IFS}(U_\iota)$ и $\alpha, \beta, \gamma_\alpha, \gamma_\beta \in [0, 1]$ в сила е следната структура за примера на $A \in \text{IFS}(X)$ от Фиг. 4.3. Нека отбележим, че в този пример $|X| = 20$.

1. За ε_0 :

$$\begin{aligned} \bullet \mu_{\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_0) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{0,\mu})| \\ &= \frac{|\emptyset|}{|X|} = 0, \\ \bullet \nu_{\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_0) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{0,\nu})| \\ &= \frac{1}{|X|} |\nu_A^{-1}[0, \beta) \cap \mu_A^{-1}(0, \alpha)| \\ &= \frac{1}{20} |\{17, 18, 19\}| \\ &= \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

2. За ε_π :

$$\begin{aligned} \bullet \mu_{\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_\pi) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\pi,\mu})| \\ &= \frac{|\emptyset|}{|X|} = 0, \\ \bullet \nu_{\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_\pi) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\pi,\nu})| \\ &= \frac{|\emptyset|}{|X|} = 0. \end{aligned}$$

3. За $\varepsilon_\square$:

$$\begin{aligned} \bullet \mu_{\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_\square) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\square,\mu})| \\ &= \frac{|\emptyset|}{|X|} = 0, \\ \bullet \nu_{\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_\square) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\square,\nu})| \\ &= \frac{1}{|X|} |\mu_A^{-1}(0, \alpha) \cap \nu_A^{-1}[\beta, 1]| \\ &= \frac{1}{20} |\{11, 12, 13, 14, 15\}| = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4. За $\varepsilon_\diamond$:

$$\begin{aligned} \bullet \mu_{\iota(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_\diamond) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{\diamond,\mu})| \\ &= \frac{|\emptyset|}{|X|} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \nu_{i(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))}(\varepsilon_\diamond) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_\diamond, \nu)| \\
&= \frac{1}{|X|} |(\mu_A^{-1}\{0\} \cap \nu_A^{-1}[0, \beta)) \cup (\mu_A^{-1}[\alpha, 1] \cap \nu_A^{-1}[0, \beta))| \\
&= \frac{1}{20} |\{16\} \cup \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}| = \frac{7}{20}.
\end{aligned}$$

Забележка 17 С предположенията в условието на Забележка 16 и примера от Фиг. 4.3, нека изчислим метриките свързани с ИР индикатор, въведени чрез Дефиниция 10.

1. Степенна, с която A е равно на $\mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A)$,

$$\begin{aligned}
\iota_{=}(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A)) &= \frac{1}{|X|} |j(A, \mathcal{I}_{\mu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A))(\varepsilon_{eq})| \\
&= \frac{1}{|X|} |(\mu_A^{-1}\{0\} \cap \nu_A^{-1}[\beta, 1]) \cup (\mu_A^{-1}[\alpha, 1 - \beta] \cap \nu_A^{-1}[\beta, 1 - \alpha])| \\
&= \frac{1}{20} |\{10, 11, 14\} \cup \{0, 1, 2, 3\}| = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$
2. Степенна, с която A е $\leq$ -включено в B ,

$$\begin{aligned}
\iota_{\leq}(A, B) &= \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_0) + \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\square) + \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\diamond) + \iota_{=}(A, B) \\
&= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$
3. Степенна, с която A е строго $\leq$ -включено в B ,

$$\begin{aligned}
\iota_{<}(A, B) &= \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_0) + \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\square) + \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\diamond) \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$
4. Степенна, с която A е $\preceq_\pi$ -включено в B ,

$$\begin{aligned}
\iota_{\preceq_\pi}(A, B) &= \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\pi) + \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\square) + \nu_{i(A, B)}(\varepsilon_\diamond) + \iota_{=}(A, B) \\
&= 0 + 0 + \frac{7}{20} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20} + \frac{5}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$
5. Степенна, с която A е строго $\preceq_\pi$ -включено в B ,

$$\begin{aligned}
\iota_{\prec_\pi}(A, B) &= \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\pi) + \mu_{i(A, B)}(\varepsilon_\square) + \nu_{i(A, B)}(\varepsilon_\diamond) \\
&= 0 + 0 + \frac{7}{20} = \frac{7}{20}
\end{aligned}$$

Могат да се въведат и съответстващите на $\mathcal{C}_{\nu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}$ твърдения, дадени в Забележка 16 и Забележка 17 за ИР индикатор на включване ι .

Глава 6

Софтуерна разработка на операторите за ИРМ

В Глава 6 даваме указания как може да се използва софтуерното приложение за изчисляване и визуализация на въведените оператори за ИРМ. Моделите на ИРМ и операторите върху тях са разработени на програмния език Python и визуализирани чрез библиотеката `matplotlib`. Ще опишем накратко най-важните програмни скриптове.

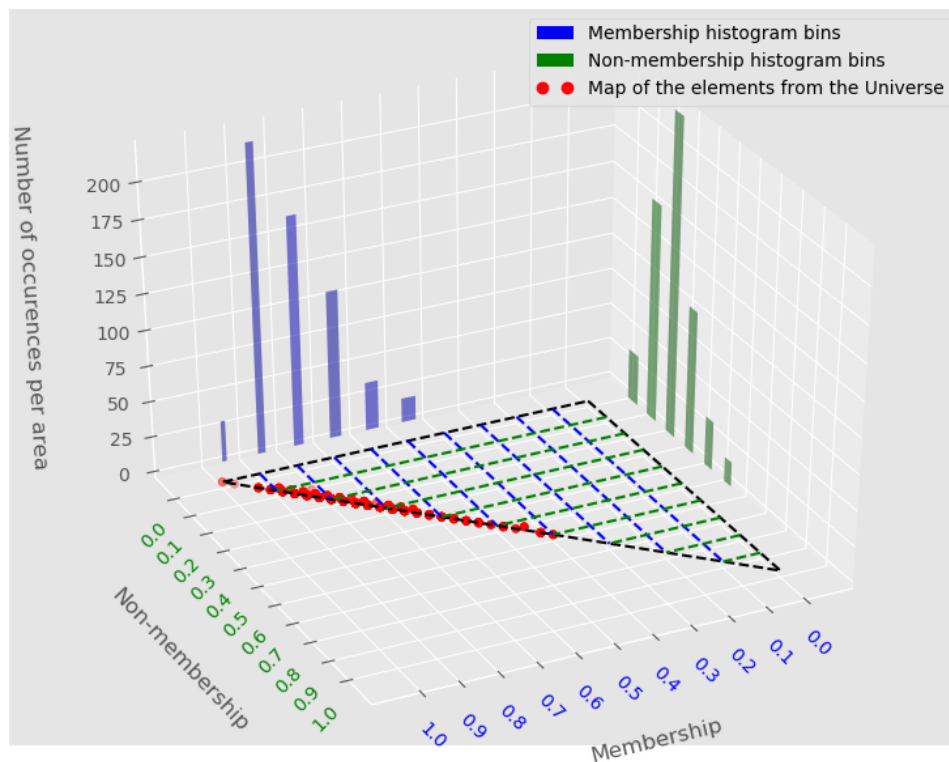
6.1 Универсум

Скриптът `universal_set.py` се състои от имплементация на главния обект, описващ ИРМ и основните операция за мутация и проверки за консистентност на ИРМ. Някои от свойствата му включват:

- Добавяне на нов обект към Универсума
- Запазване на Универсума във файл в CSV формат
- Прикрепяне на Универсум към обект
- Връщане на размерността на Универсума
- Проверка дали Универсумът е празно множество

В скрипта `lattice.py` са реализирани решетъчната структура на ИРМ и основните наредби, свързани с нея. Описаните операции са за двете наредби: стандартната и π -наредбата, както е описана в Раздел 2.1.

- `Infimum` и `Supremum` на подмножества на Универсума
- равенство (идентичност)
- по-малко
- по-малко или равно
- по-голямо
- по-голямо или равно



Фигура 6.1: 3D графика на 2D хистограма: представена е хистограмата на степените на принадлежност и непринадлежност.

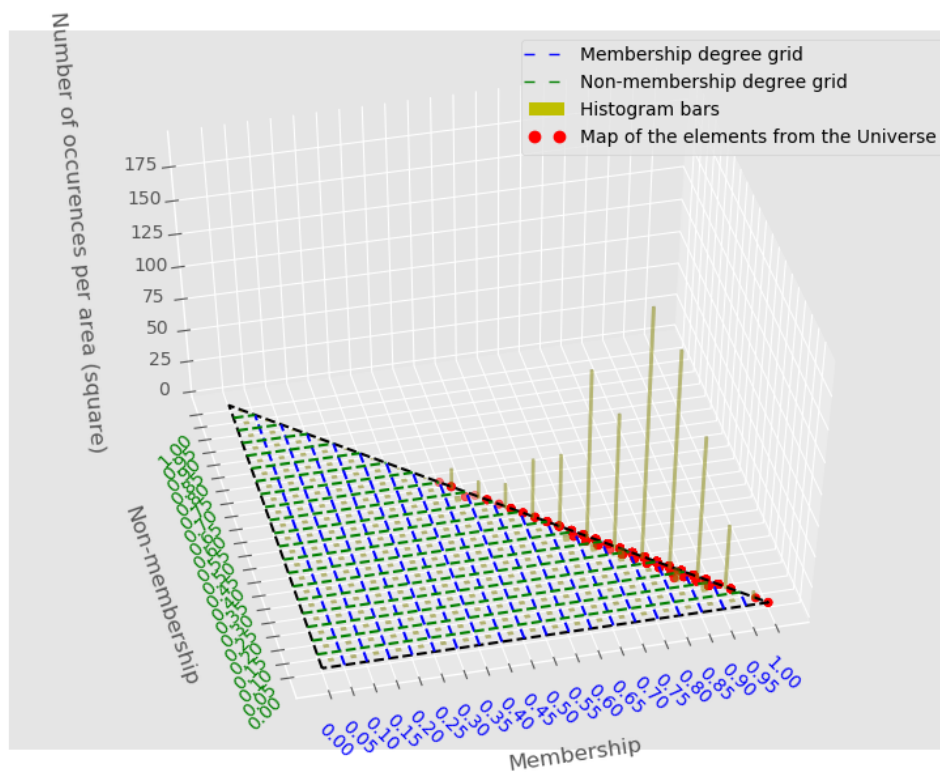
6.2 ИР стек-бар представяне и хистограма от степените на принадлежност и на непринадлежност

В този раздел въвеждаме скрипт с функции, които изобразяват два типа от стек барове за ИРМ. Показваме също 2D хистограма, вземайки под внимание степените на принадлежност и непринадлежност.

6.3 3D Хистограми

Скриптът `ifs_3Dplot.py` дефинира няколко типа хистограми. Като например:

- Първата на Фиг. 6.2 представя 3D хистограма на степените на принадлежност и непринадлежност.
- Втората на Фиг. 6.1 представя 3D хистограма за 2D координатите на елементите на ИРМ, представени в ИР-триъгълника.



Фигура 6.2: 3D Хистограма

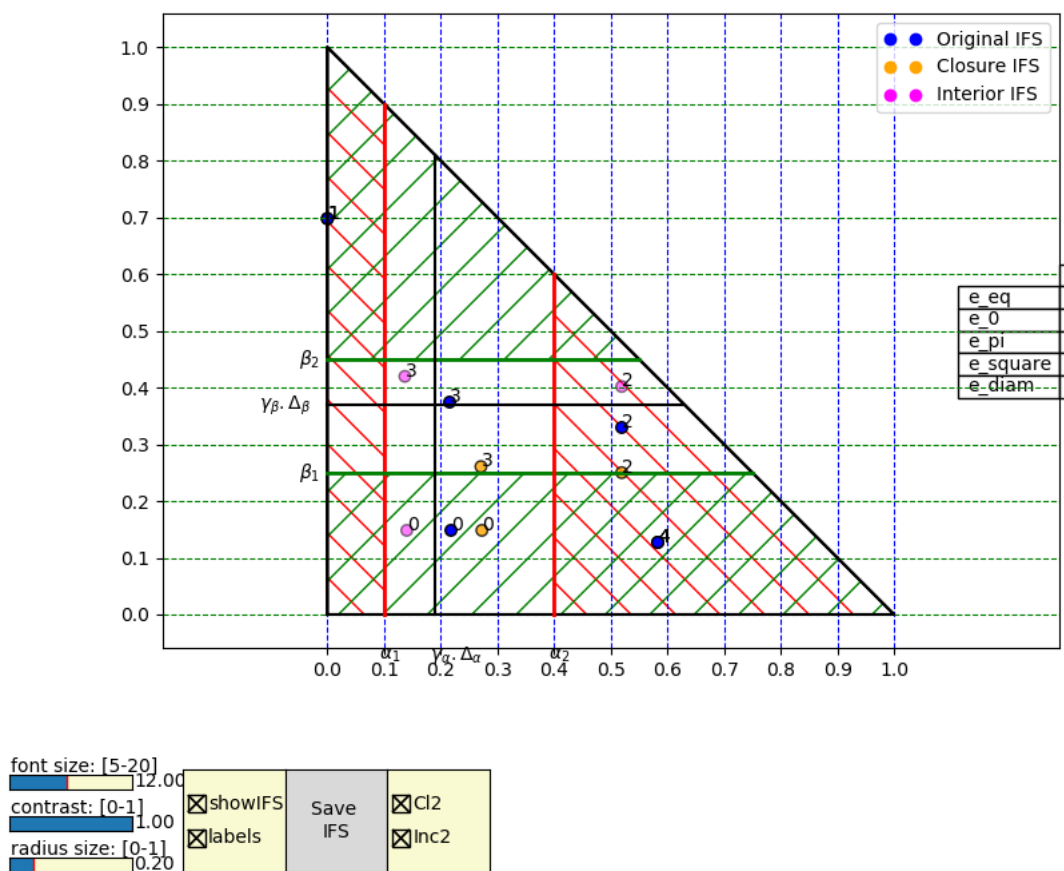
6.4 Изчисление и визуализация на (пре)топологичните оператори

Разработено е интерактивно приложение за моделиране, изчисление и визуализация на топологичните и претопологичните оператори. Освен тях, могат да се дефинират и модели на произволни оператори за ИРМ (разширените модални оператори например). Скриптът се стартира с командата:

python3 ifs_topo_modeler.py

Както се вижда на Фиг. 6.3, се появява интерактивна графика, която може да променя

- font size (големина на шрифта)
- contrast (контраст)
- radius size (големината на радиуса)
- show / hide IFS (показване / скриване на ИРМ)
- show / hide labels (показване / скриване на етикетите)



Фигура 6.3: Снимка на графичния интерфейс при действието на оператора на преотваряне $\mathcal{I}_{\mu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$ върху $A \in IFS(X)$ и на оператора на прездатваряне $\mathcal{C}_{\nu;\alpha,\beta}^{\gamma_\alpha,\gamma_\beta}$ върху A (вж. Раздел 4.3)

- save IFSs (запазване на ИРМ)
- show / hide Closure and Interior operators (показване / скриване на операторите за затваряне и отваряне)

Потребителят може интерактивно чрез “drag and drop” операция да мести сините точки, отговарящи на оригиналното ИРМ, върху което ще се прилагат операторите. С бутона “Save IFS” всички резултати се запазват във файл в .json формат: промененото входно множество, неговите образи чрез операторите, които действат върху него, цветовете на ИРМ, радиусът на кръгчетата, които го представят и т.н.

Заклучение - резюме на получените резултати

7.1 Резултати

В хода на изследователската работа, извършена от автора на дисертацията, са получени следните оригинални приноси:

I Научни приноси

1. Дефинирана е нова частична наредба за ИРМ $(IFS(X), \preceq_\pi)$, наречена π -наредба. Доказано е, че тази наредба е пълна лява, но не е пълна дясна решетка. Наименованието π не е случайно, т.к. колкото е по-голям един елемент (ИРМ) в тази наредба, толкова по-малка е степента му на неопределеност и достига нула, точно когато той е максимален елемент на решетката, т.е. съвпада с обикновено размито множество. Освен това са изложени връзките между тази частична наредба и двете квази-наредби, съответстващи на модалните оператори ($\Box$ -необходимо и $\Diamond$ -възможно).
2. Въведени са няколко вида индекси за неопределеност и два вида индикатори на включване на едно ИРМ A в друго ИРМ B . Въведените индикатори са: Теоретико-множествен индикатор $j(A, B)$ и индикатор на включване от ИР вид $\iota(A, B)$. Тези индекси за неопределеност и индикатори на включване са тясно свързани с π -наредбата за ИРМ, както и модалните оператори. Индикаторите на включване се явяват сами по себе си ИРМ над подходящи универсуми. Благодарение на индикаторите на включване авторът на дисертацията дефинира индекси на включване на едно ИРМ в друго ИРМ, които вече приемат числова стойност в интервала $[0, 1]$.
3. Въведени са нов тип околности за ИРМ, наречени ИР-околност $\mathcal{B}_{\text{IF}}(A, \xi, \eta)$ и ИР-кълбо $\mathcal{B}_{\text{IF}}(A, \epsilon)$, съответно, където $\xi, \eta, \epsilon \in [0, 1]$. Дадени са теореми, показващи връзките между новите ИР-околности и стандартните метрични околности, както и връзките им с разширените модални оператори за ИРМ. Въведени са също и насочени ИР-околности, които специфицират горе споменатите. Дадени са и теореми, които показват връзките между насочените ИР-околности и обобщените модални оператори.
4. Изложена е теория на топологичните и претопологичните оператори за ИРМ чрез въведени конструктивни дефиниции на оператори за преотваряне $\mathcal{I}_{\nu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A)$ и претатваряне $\mathcal{C}_{\nu; \alpha, \beta}^{\gamma_\alpha, \gamma_\beta}(A)$ на дадено ИРМ $A \in IFS(X)$, където $\alpha, \beta, \gamma_\alpha, \gamma_\beta \in [0, 1]$. В Раздел 4.3 са въведени два класа непрекъснати спомагателни функции: $f_{\tilde{\alpha}}^{\gamma_{\tilde{\alpha}}}$ и $g_{\tilde{\alpha}}^{\gamma_{\tilde{\alpha}}}$, както и два класа спомагателни функции със скокове: $F_{\tilde{\alpha}}^{\gamma_{\tilde{\alpha}}}$ и $G_{\tilde{\alpha}}^{\gamma_{\tilde{\alpha}}}$. Ако $f \in \{f_{\tilde{\alpha}}^{\gamma_{\tilde{\alpha}}}, F_{\tilde{\alpha}}^{\gamma_{\tilde{\alpha}}}\}$ и

$g \in \{g_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}, G_{\bar{\beta}}^{\gamma_{\bar{\beta}}}\}$, дефинирахме **осем различни** вида преотварящи оператора чрез

$$\mathcal{I}_{\mu}(f, g) = (f, \min(g, 1 - f)) : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2$$

и

$$\mathcal{I}_{\nu}(f, g) = (\min(f, 1 - g), g) : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2,$$

както и осем различни вида презатварящи оператора чрез

$$\mathcal{C}_{\mu}(g, f) = (g, \min(f, 1 - g)) : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2$$

и

$$\mathcal{C}_{\nu}(g, f) = (\min(g, 1 - f), f) : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2.$$

В дадени са условията, които трябва да удовлетворява един преотварящ, съответно презатварящ оператор, за да бъде отварящ, съответно затварящ. Основен принос е излагането на теореми и свойства, показващи връзките между така въведените претопологични и топологични оператори и другите понятия в теорията на ИРМ.

II Научно-приложни и приложни приноси

Създадено е софтуерно интерактивно приложение, което изчислява и визуализира претопологичните и топологичните оператори, дефинирани в дисертацията. Освен тези оператори, в приложението са вградени и няколко вида хистограми за ИРМ, както и модалните оператори. В Раздел 6 са описани основните функционалности на приложението.

В бъдеще смятаме да продължим и разширим дейността по работата в тематиката на дисертацията в посока връзка на топологичните с модалните оператори и приложение в препоръчителните системи.

Публикации на автора по дисертационния труд и забелязани цитирания

1. [64] Marinov E., Atanassov K., Vassilev P., Su J. (2016), Directed intuitionistic fuzzy neighbourhoods. IEEE Conf. on Intelligent Systems 2016: 544–549 .

Цитати (1):

- Ismaili Sh., Fidanova S., (2019) Application of Intuitionistic Fuzzy Sets for Conflict Resolution Modeling and Agent Based Simulation. INT.J.BIOAUTOMATION, 23(2), 175–184.

2. [65] Marinov E., Tsvetkov R., Vassilev P. (2016), Intuitionistic Fuzzy Inclusion Indicator of Intuitionistic Fuzzy Sets. In: Angelov P., Sotirov S. (eds) Imprecision and Uncertainty in Information Representation and Processing. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, vol 332., 41–53.

Цитати (1):

- Ismaili Sh., Fidanova S. (2019), Application of Intuitionistic Fuzzy Sets for Conflict Resolution Modeling and Agent Based Simulation. INT.J.BIOAUTOMATION, 23(2), 175–184.

3. [66] Marinov E., Vassilev P. , Atanassov K., (2015), On Intuitionistic Fuzzy Metric Neighbourhoods, *Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (IFSA-EUSFLAT-15), Gijón, Spain.*, 1585–1591.

4. [67] Marinov, E. (2013), On the operators and partial orderings of intuitionistic fuzzy sets, Notes on IFS, Vol. 19, Number 3, 25–33.
5. [68] Marinov, E., Vassilev P., and Atanassov K. (2016), On separability of intuitionistic fuzzy sets. Novel Developments in Uncertainty Representation and Processing. Springer, Cham, 111–123.

Цитати (3):

- Ismaili Sh., Fidanova S. (2019), Application of Intuitionistic Fuzzy Sets for Conflict Resolution Modeling and Agent Based Simulation. INT.J.BIOAUTOMATION, 23(2), 175–184.
 - Roeva O., Fidanova S. (2020), Different InterCriteria Analysis of Variants of ACO algorithm for Wireless Sensor Network Positioning. In: Fidanova S. (eds) Recent Advances in Computational Optimization. Studies in Computational Intelligence, vol 838. Springer.
 - Fidanova S., Roeva O., Luque G., Paprzycki M. (2020), InterCriteria Analysis of Different Hybrid Ant Colony Optimization Algorithms for Workforce Planning. In: Fidanova S. (eds) Recent Advances in Computational Optimization. Studies in Computational Intelligence, vol 838. Springer.
6. [69] Marinov, E. (2014), π -ordering and index of indeterminacy for intuitionistic fuzzy sets, Proc. of 12th Int. Workshop on IFS and GN, IWIFSGN'13, Warsaw, Oct. 2013, Modern Approaches in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics. Volume I: Foundations, IBS PAN-SRI PAS, Warsaw, 129-138.

Цитати (3):

- Vassilev P., Stoyanov T. (2018), On Power Mean Generated Orderings Between Intuitionistic Fuzzy Pairs. In: Kacprzyk J., Szmidt E., Zadrożny S., Atanassov K., Krawczak M. (eds) Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. EUSFLAT 2017, IWIFSGN 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 643. Springer, Cham, pp 476-481
 - Vassilev P. (2015-2016), A note on new partial ordering over intuitionistic fuzzy sets. Annual of Informatics Section Union of Scientists in Bulgaria, 8, pp 18-22.
 - Atanassova V., & Doukovska, L. (2017), Compass-and-straightedge constructions in the intuitionistic fuzzy interpretational triangle: two new intuitionistic fuzzy modal operators. Notes on intuitionistic fuzzy sets, 23(2), pp. 1-7.
7. [70] Marinov E., Atanassov K. (2020), Partially Continuous Pretopological and Topological Operators for Intuitionistic Fuzzy Sets, Iranian Journal of Fuzzy Systems (IJFS), Vol 17, Number 2., 1–15.

Импакт фактор: 1.360

8. [71] Marinov E. (2019), Partially smooth linear pretopological and topological operators for fuzzy sets, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 22, No. 3, pp. 471–485.

Библиография

- [4] Adams C. and Franzosa R. (2008), *Introduction to topology - pure and applied*. Pearson Prentice Hall, USA.
- [7] Arkhangelskii A., Fedorchuk V. (1990), General topology I, Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Atanassov K. (1983), Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKR's Session, Sofia, June 1983 (Deposed in Central Sci. - Techn. Library of Bulg. Acad. of Sci., 1697/84) (in Bulg.).
- [10] Atanassov, K. (1986): Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 20(1), 87–96.
- [11] Atanassov K. (1999), Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [13] Atanassov K. (2012), On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory. Springer-Verlag, Berlin.
- [14] Atanassov K. (2005), On one type of intuitionistic fuzzy modal operators. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 11(5), 24–28 , <http://ifigenia.org/wiki/issue:nifs/11/5/24-28>
- [18] Atanassov K. (2001), On four intuitionistic fuzzy topological operators. Mathware & Soft Computing, Vol. 8, 65-70.
- [23] Badard R. (1981), Fuzzy pretopological spaces and their representation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 81, 2, 378–390
- [25] Birkhoff G. (1967), Lattice theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island
- [26] Chang C. L. (1968), Fuzzy topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol 24, Issue 1, 182–190.
- [29] Çoker, D. (1997), An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 88, No. 1, 81–89.
- [38] Goguen J. A. (1967), L-fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 18., 145–174.
- [46] Hammer P. C. (1967), Extended topology and systems, Math. Systems Theory 1, No. 2.
- [55] Kuratowski K. (1966), *Topology* Vol 1., Academic Press, New York and London.
- [64] Marinov E., Atanassov K., Vassilev P., Su J. (2016), Directed intuitionistic fuzzy neighbourhoods. IEEE Conf. on Intelligent Systems 2016: 544–549.
- [65] Marinov E., Tsvetkov R., Vassilev P. (2016), Intuitionistic Fuzzy Inclusion Indicator of Intuitionistic Fuzzy Sets. In: Angelov P., Sotirov S. (eds) Imprecision and Uncertainty in Information Representation and Processing. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, vol 332., 41–53.

- [66] Marinov E., Vassilev P. , Atanasov K., (2015), On Intuitionistic Fuzzy Metric Neighbourhoods, *Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (IFSA-EUSFLAT-15), Gijón, Spain.*, 1585–1591.
- [67] Marinov E. (2013), On the operators and partial orderings of intuitionistic fuzzy sets, *Notes on IFS*, Vol. 19, Number 3, 25–33.
- [68] Marinov E., Vassilev P., and Atanasov K. (2016.) On separability of intuitionistic fuzzy sets. *Novel Developments in Uncertainty Representation and Processing*. Springer, Cham, 111–123.
- [69] Marinov E. (2014), π -ordering and index of indeterminacy for intuitionistic fuzzy sets, *Proc. of 12th Int. Workshop on IFS and GN, IWIFSGN'13, Warsaw, Oct. 2013, Modern Approaches in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics*. Volume I: Foundations, IBS PAN-SRI PAS, Warsaw, 129-138.
- [70] Marinov E., Atanasov K. (2020), Partially Continuous Pretopological and Topological Operators for Intuitionistic Fuzzy Sets, *Iranian Journal of Fuzzy Systems (IJFS)*, Vol 17, Number 2., 1–15.
- [71] Marinov E. (2019), Partially smooth linear pretopological and topological operators for fuzzy sets, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 22, No. 3, pp. 471–485.
- [90] Szmidt E. and Kacprzyk J. (2000), Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 114, No. 3, 505–518.
- [92] Szmidt E. and Baldwin J. (2003), New similarity measure for intuitionistic fuzzy set theory and mass assignment theory. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 9 (3), 60–76.
- [107] Zadeh L.A. (1965), Fuzzy sets. *Information and Control*, Vol. 8, 338–353.