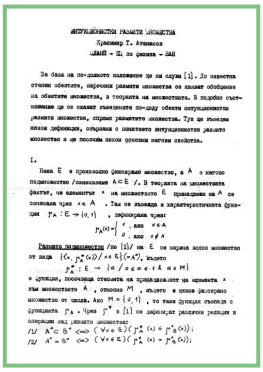
INT. J. BIOAUTOMATION, 2016, **20**(S1), S1-S6

Intuitionistic Fuzzy Sets

Krassimir T. Atanassov*

How to cite:

Atanassov K. T. Intuitionistic Fuzzy Sets, VII ITKR Session, Sofia, 20-23 June 1983 (Deposed in Centr. Sci.-Techn. Library of the Bulg. Acad. of Sci., 1697/84) (in Bulgarian). Reprinted: Int. J. Bioautomation, 2016, 20(S1), S1-S6.



ИНТУИЦИОНИСТКИ РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА

Красимир Т. Атанасов

ЦЛАНП - ЕЦ по физика - БАН

За база на по-долното изложение ще ни служи [1]. До известна степен обектите, наречени размити множества се явяват обобщение на обектите множества, в теорията на множествата. В подобно съотношение ще се окажат въведените по-долу обекти интуиционистки размити множества, спрямо размитите множества. Тук ще въведем някои дефиниции, свързани с понятието интуиционистки размито множество и ще посочим някои основни негови свойства.

I.

Нека E е произволно фиксирано множество, а A е негово подмножество /означаваме $A \subset E$ /. В теорията на множествата фактът, че елементът x на множеството E принадлежи на A се означава чрез $x \in A$. Там се въвежда и характеристичната функция $\mu_A : E \to \{0, 1\}$, дефинирана чрез:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ ако } x \in A \\ 0, \text{ ако } x \notin A \end{cases}$$

Размито подмножество /по [1]/ на E се нарича всяко множество от вида $\{\langle x, \mu^*_A(x)\rangle / x \in E\} (= A^*)$, където

$$\mu^*_A : E \to \{a / 0 \le a \le 1 \,\&\, a \in M\}$$

е функция, посочваща степента на принадлежност на елемента x към множеството A, относно M, където е някое фиксирано множество от числа. Ако $M = \{0, 1\}$, то тази функция съвпада с функцията μ_A. Чрез μ^* в [1] се дефинират различни релации и операции над размити множества:

/1/ $A^* \subset B^* \Longleftrightarrow (\forall x \in E)(\mu^*_A(x) \le \mu^*_B(x))$;

/2/ $A^* = B^* \Longleftrightarrow (\forall x \in E)(\mu^*_A(x) = \mu^*_B(x))$;

I.

Let E be an arbitrary fixed set and A be its subset (denote $A \subset E$). In the theory, the fact that element x of set E belongs to A is denoted by $x \in A$.

There, it is introduced the characteristic function $\mu_A : E \to [0, 1]$, defined by

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } & x \in A \\ 0, \text{ if } & x \notin A \end{cases}.$$

Fuzzy subset [1] of E is each set with the form $\{\langle x, \mu^*_A(x)\rangle \mid x \in E\} (= A^*)$, where $\mu^*_A : E \to \{a \mid 0 \le a \le 1 \;\&\; a \in M\}$ is a function, determining the degree of membership of the element x to some set A, about M, that is some numerical set. If $M = \{0, 1\}$, then this function coincides with function μ_A. By μ^*, in [1], different relations and operations over fuzzy sets are introduced:

(1) $A^* \subset B^*$ iff $(\forall x \in E)(\mu^*_A(x) \le \mu^*_B(x))$;

(2) $A^* = B^*$ iff $(\forall x \in E)(\mu^*_A(x) = \mu^*_B(x))$;

(3) $A^* \ne B^*$ iff $(\exists x \in E)(\mu^*_A(x) \ne \mu^*_B(x))$;

(4) $\overline{A}^* = \left\{\left\langle x, \mu^*_{\overline{A}}(x)\right\rangle \middle| x \in E\right\}$, and $\mu^*_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$;

(5) $A^* \cap B^* = \left\{\left\langle x, \mu^*_{A \cap B}(x)\right\rangle \middle| x \in E\right\}$, and $\mu^*_{A \cap B}(x) = \min(\mu^*_A(x), \mu^*_B(x))$;

(6) $A^* \cup B^* = \left\{\left\langle x, \mu^*_{A \cup B}(x)\right\rangle \middle| x \in E\right\}$, and $\mu^*_{A \cup B}(x) = \max(\mu^*_A(x), \mu^*_B(x))$;

(7) $A^* \otimes B^* = (A^* \cap \overline{B}^*) \cup (\overline{A}^* \cap B^*)$;

(8) $A^* - B^* = A^* \cap \overline{B}^*$;

(9) $\mathscr{P}_M(B) = \left\{\left\{\left\langle x, \mu^*_A(x)\right\rangle \middle| \mu^*_A(x) \in M'\right\} \middle| x \in E \,\&\, M' \subset M\right\}$;

(10) $A.B = \left\{\left\langle x, \mu^*_{A.B}\right\rangle, \text{ and } \mu^*_{A.B} = \mu^*_A(x).\mu^*_B(x)\right\}$;

(11) $A + B = \left\{\left\langle x, \mu^*_{A+B}\right\rangle, \text{ and } \mu^*_{A+B} = \mu^*_A(x) + \mu^*_B(x) - \mu^*_A(x).\mu^*_B(x)\right\}$.

---

* Current affiliation: Bioinformatics and Mathematical Modelling Department
Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of Sciences
105 Acad. G. Bonchev Str., Sofia 1113, Bulgaria, E-mail: krat@bas.bg

Behind all these definitions, the Axiom for Excluded Middle is seen, i.e., it is supposed that if for the element x is not valid that $x \in A$, then $x \notin A$ and opposite.

Our next research will be directed t introducing of definitions similar to the above ones, but with lack of this Axiom, i.e., we will obtain a theory from intuitionistic type. Let us suppose that there is a situation, in which besides the cases $x \in A$ and $x \notin A$ to be possible a third case – when we cannot determine which of the two cases is valid. Therefore,

$$\mu_A^*(x) + \mu_{\overline{A}}^*(x) \leq 1.$$

When there is "=", we obtain the ordinary fuzzy sets, in the opposite case, the new objects must be used – the intuitionistic fuzzy sets.

Let us discuss one example. Let $E = \{0,1,2,...,10\}$, $M = \{0,1\} \subset \mathscr{R}$,

$A = \{n | n \in E \&$ the equation $x^3 - y^2 = n$ has more than 2 solutions$\}$.

For example, $\mu_A^*(0) = 1$, $\mu_A^*(1) = 0$, but $\mu_A^*(7)$ cannot be determined, because it is not known whether the equation $x^3 - y^2 = n$ has other solutions, except $(2,1)$ and $(32,181)$.

Let us put $\nu_A^*(x) = \mu_{\overline{A}}^*(x)$. Therefore,

$$0 \leq \mu_A^*(x), \nu_A^*(x) \leq 1, \;\; 0 \leq \mu_A^*(x) + \nu_A^*(x) \leq 1.$$

The intuitionistic fuzzy set has the form:

$$\{\langle x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)\rangle | x \in E\}.$$

For it, (1)-(3), (7) and (8) are not changed and the rest equalities obtain the form:

(4) $\overline{A^*} = \{\langle x, \nu_{\overline{A}}^*(x), \mu_{\overline{A}}^*(x)\rangle | x \in E\}$,
 and $\mu_{\overline{A}}^*(x) = \nu_A(x), \nu_{\overline{A}}^*(x) = \mu_A(x)$;
(5) $A^* \cap B^* = \{\langle x, \mu_{A\cap B}^*(x), \nu_{A\cap B}^*(x)\rangle | x \in E\}$,
 and $\mu_{A\cap B}^*(x) = \min(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x)), \nu_{A\cap B}^*(x) = \max(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))$;
(6) $A^* \cup B^* = \{\langle x, \mu_{A\cup B}^*(x), \nu_{A\cup B}^*(x)\rangle | x \in E\}$,
 and $\mu_{A\cup B}^*(x) = \max(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x)), \nu_{A\cup B}^*(x) = \min(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))$;
(9) $\mathscr{P}_M(E) = \{\{\langle x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)\rangle | \mu_A^*(x) \in M', \nu_A^*(x) \in M''\} | x \in E, \; M' \subset M, M'' \subset M\}$;
(10) $A.B = \{\langle x, \mu_{A.B}^*, \nu_{A.B}^*\rangle | x \in E\}$,,
 and $\mu_{A.B}^* = \mu_A^*(x).\mu_B^*(x), \nu_{A.B}^* = \nu_{A+B}^* = \nu_A^*(x) + \nu_B^*(x) - \nu_A^*(x).\nu_B^*(x)$;
(11) $A + B = \{\langle x, \mu_{A+B}^*, \nu_{A+B}^*\rangle | x \in E\}$,,
 and $\mu_{A+B}^* = \mu_A^*(x) + \mu_B^*(x) - \mu_A^*(x).\mu_B^*(x), \nu_{A+B}^* = \nu_A^*(x).\nu_B^*(x)$.

Similarly to [1], the following assertions are valid.

Theorem 1: Operations $\cap$ and $\cup$ are commutative, associative, distributive between them from left and right sides, idempotent and satisfying De Morgan's Laws.

Theorem 2: Operations . and $+$ are commutative, associative and satisfying De Morgan's Laws.

Theorem 3: Operations . and $+$ are distributive from left and right sides about operations $\cap$ and $\cup$.

II.

In fuzzy sets theory, the Hemming's distance between two sets is defined by

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(A,B) &= \sum_{x\in E} |\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)| \\ &= \int_{\mathscr{R}} |\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)|dx, \text{ for } M = \mathscr{R},\end{aligned}$$

and Euclid's distance is defined by

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(A,B) &= \sqrt{\sum_{x\in E} (\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2} \\ &= \sqrt{\int_{\mathscr{R}} \sum_{x\in E} (\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2 dx}, \text{ for } M = \mathscr{R}.\end{aligned}$$

Analogues of these definitions, here have the forms:

$$\begin{aligned}\mathscr{D}'(A,B) &= \frac{1}{2} \sum_{x\in E} (|\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)| + |\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x)|) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathscr{R}} (|\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)| + |\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x)|)dx, \text{ for } M = \mathscr{R},\end{aligned}$$

and Euclid's distance is defined by

$$\begin{aligned}\mathscr{E}'(A,B) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{x\in E} ((\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2 + (\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x))^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_{\mathscr{R}} ((\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2 + (\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x))^2)dx}, \text{ for } M = \mathscr{R}.\end{aligned}$$

III.

We will call that set $A_{\alpha,\beta} \subset A$ is a set of level (α, β) if

$A_{\alpha,\beta} = \{x | x \in E \& \mu_A^*(x) \geq \alpha \& \nu_A^*(x) \leq \beta\}.$

Theorem 4:

a) $\forall \beta (0 \leq \beta \leq 1) : \alpha_2 \geq \alpha_1 \to A_{\alpha_2,\beta} \subseteq A_{\alpha_1,\beta}$,

b) $\forall \alpha (0 \leq \alpha \leq 1) : \beta_1 \geq \beta_2 \to A_{\alpha,\beta_1} \subseteq A_{\alpha,\beta_2}$.

IV.

Now, we define two operators, that transform each intuitionistic fuzzy set to a fuzzy set. They are analogous of operators "necessity" and "possibility", that are defined in the modal logic. For each set $A \subset E$:

$$\Box A^* = \Box\{\langle x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)\rangle | x \in E\} = \{\langle x, \mu_A^*(x), 1-\mu_A^*(x)\rangle | x \in E\},$$

$$\Diamond A^* = \Diamond\{\langle x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)\rangle | x \in E\} = \{\langle x, 1-\nu_A^*(x), \nu_A^*(x)\rangle | x \in E\}.$$

The connection between these two operators is given by the following:

Theorem 5: For each intuitionistic fuzzy set A^*:

a) $\Box A^* = \overline{\Diamond \overline{A^*}}$,

b) $\Diamond A^* = \overline{\Box \overline{A^*}}$.

Really,

$$\overline{\Box \overline{A^*}} = \overline{\Box\{\langle x, \nu_A^*(x), \mu_A^*(x)\rangle | x \in E\}} = \overline{\{\langle x, \nu_A^*(x), 1-\nu_A^*(x)\rangle | x \in E\}}$$

$$= \{\langle x, 1-\nu_A^*(x), \nu_A^*(x)\rangle | x \in E\} = \Diamond A^*.$$

$$\overline{\Diamond \overline{A^*}} = \overline{\Diamond\{\langle x, \nu_A^*(x), \mu_A^*(x)\rangle | x \in E\}} = \overline{\{\langle x, 1-\mu_A^*(x), \mu_A^*(x)\rangle | x \in E\}}$$

$$= \{\langle x, \mu_A^*(x), 1-\mu_A^*(x)\rangle | x \in E\} = \Box A^*.$$

Therefore, the two operators are defined correctly. The connection between them is given by:

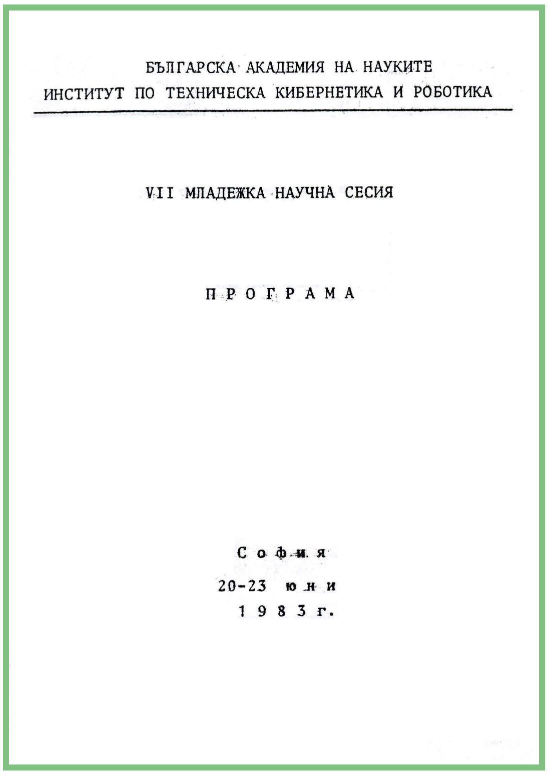
Theorem 6: For each intuitionistic fuzzy set A^*:

$$\Box A^* \subseteq A \subseteq \Diamond A^*.$$

References

1. Kaufmann A. (1977). Introduction a la Theorie des Sour-ensembles Flous, Paris, Masson.

Facsimiles



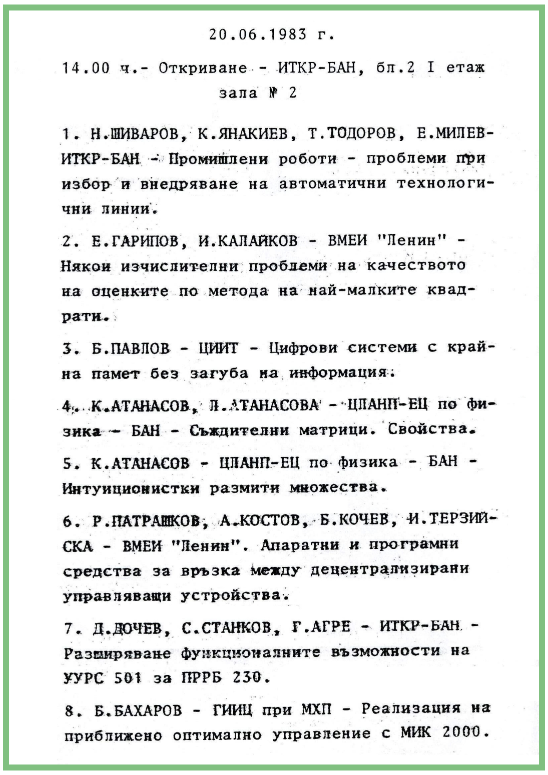
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО ТЕХНИЧЕСКА КИБЕРНЕТИКА И РОБОТИКА

VII МЛАДЕЖКА НАУЧНА СЕСИЯ

П Р О Г Р А М А

С о ф и я
20-23 ю н и
1 9 8 3 г.

Cover page



20.06.1983 г.

14.00 ч.- Откриване - ИТКР-БАН, бл.2 I етаж
зала № 2

1. Н.ШИВАРОВ, К.ЯНАКИЕВ, Т.ТОДОРОВ, Е.МИЛЕВ-ИТКР-БАН - Промишлени роботи - проблеми при избор и внедряване на автоматични технологични линии.

2. Е.ГАРИПОВ, И.КАЛАЙКОВ - ВМЕИ "Ленин" - Някои изчислителни проблеми на качеството на оценките по метода на най-малките квадрати.

3. Б.ПАВЛОВ - ЦИИТ - Цифрови системи с крайна памет без загуба на информация.

4. К.АТАНАСОВ, Л.АТАНАСОВА - ЦЛАНП-ЕЦ по физика - БАН - Съждителни матрици. Свойства.

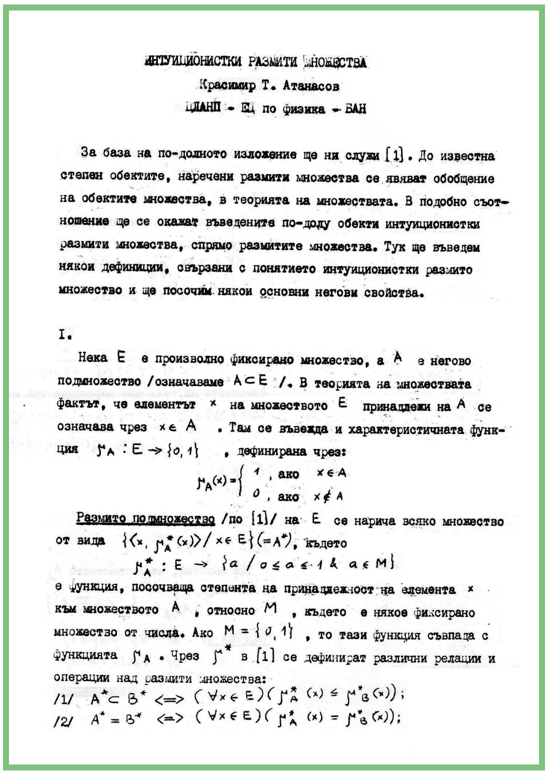
5. К.АТАНАСОВ - ЦЛАНП-ЕЦ по физика - БАН - Интуиционистки размити множества.

6. Р.ПАТРАШКОВ, А.КОСТОВ, Б.КОЧЕВ, И.ТЕРЗИЙСКА - ВМЕИ "Ленин". Апаратни и програмни средства за връзка между децентрализирани управляващи устройства.

7. Д.ДОЧЕВ, С.СТАНКОВ, Г.АГРЕ - ИТКР-БАН - Разширяване функционалните възможности на УУРС 501 за ПРРБ 230.

8. Б.БАХАРОВ - ГИИЦ при МХП - Реализация на приближено оптимално управление с МИК 2000.

Contents



ИНТУИЦИОНИСТКИ РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА
Красимир Т. Атанасов
ЦЛАНП - ЕЦ по физика - БАН

За база на по-долното изложение ще ни служи [1]. До известна степен обектите, наречени размити множества се явяват обобщение на обектите множества, в теорията на множествата. В подобно съотношение ще се окажат въведените по-долу обекти интуиционистки размити множества, спрямо размитите множества. Тук ще въведем някои дефиниции, свързани с понятието интуиционистки размито множество и ще посочим някои основни негови свойства.

I.

Нека E е произволно фиксирано множество, а A е негово подмножество /означаваме $A \subset E$ /. В теорията на множествата фактът, че елементът x на множеството E принадлежи на A се означава чрез $x \in A$. Там се въвежда и характеристичната функция $\mu_A : E \to \{0, 1\}$, дефинирана чрез:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in A \\ 0, & \text{ако } x \notin A \end{cases}$$

Размито подмножество /по [1]/ на E се нарича всяко множество от вида $\{\langle x, \mu_A^*(x)\rangle / x \in E\} (= A^*)$, където

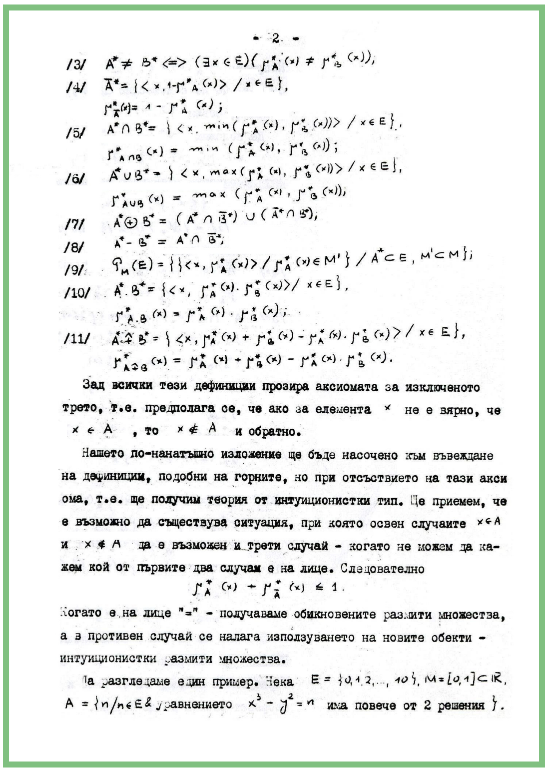
$$\mu_A^* : E \to \{a / 0 \le a \le 1 \ \& \ a \in M\}$$

е функция, посочваща степента на принадлежност на елемента x към множеството A, относно M, където е някое фиксирано множество от числа. Ако $M = \{0, 1\}$, то тази функция съвпада с функцията μ_A. Чрез μ^* в [1] се дефинират различни релации и операции над размити множества:

/1/ $A^* \subset B^* \iff (\forall x \in E)(\mu_A^*(x) \le \mu_B^*(x))$;

/2/ $A^* = B^* \iff (\forall x \in E)(\mu_A^*(x) = \mu_B^*(x))$;

Page 1



\- 2 -

/3/ $A^* \ne B^* \iff (\exists x \in E)(\mu_A^*(x) \ne \mu_B^*(x))$,

/4/ $\bar{A}^* = \{\langle x, 1-\mu_A^*(x)\rangle / x \in E\}$,

$\mu_{\bar{A}}^*(x) = 1 - \mu_A^*(x)$;

/5/ $A^* \cap B^* = \{\langle x, \min(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))\rangle / x \in E\}$,

$\mu_{A \cap B}^*(x) = \min(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))$;

/6/ $A^* \cup B^* = \{\langle x, \max(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))\rangle / x \in E\}$,

$\mu_{A \cup B}^*(x) = \max(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))$;

/7/ $A^* \oplus B^* = (A^* \cap \bar{B}^*) \cup (\bar{A}^* \cap B^*)$;

/8/ $A^* - B^* = A^* \cap \bar{B}^*$;

/9/ $\mathcal{P}_M(E) = \{\{\langle x, \mu_A^*(x)\rangle / \mu_A^*(x) \in M'\} / A^* \subset E, M' \subset M\}$;

/10/ $A^* . B^* = \{\langle x, \mu_A^*(x) . \mu_B^*(x)\rangle / x \in E\}$,

$\mu_{A.B}^*(x) = \mu_A^*(x) . \mu_B^*(x)$;

/11/ $A^* \hat{+} B^* = \{\langle x, \mu_A^*(x) + \mu_B^*(x) - \mu_A^*(x) . \mu_B^*(x)\rangle / x \in E\}$,

$\mu_{A \hat{+} B}^*(x) = \mu_A^*(x) + \mu_B^*(x) - \mu_A^*(x) . \mu_B^*(x)$.

Зад всички тези дефиниции прозира аксиомата за изключеното трето, т.е. предполага се, че ако за елемента x не е вярно, че $x \in A$, то $x \notin A$ и обратно.

Нашето по-нататъшно изложение ще бъде насочено към въвеждане на дефиниции, подобни на горните, но при отсъствието на тази аксиома, т.е. ще получим теория от интуиционистки тип. Ще приемем, че е възможно да съществува ситуация, при която освен случаите $x \in A$ и $x \notin A$ да е възможен и трети случай - когато не можем да кажем кой от първите два случая е на лице. Следователно

$$\mu_A^*(x) + \mu_{\bar{A}}^*(x) \le 1.$$

Когато е на лице "=" - получаваме обикновените размити множества, а в противен случай се налага използването на новите обекти - интуиционистки размити множества.

Да разгледаме един пример. Нека $E = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$, $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $A = \{n / n \in E \ \&$ уравнението $x^3 - y^2 = n$ има повече от 2 решения $\}$.

Page 2

\- 3 -

Например $\mu_A^*(0) = 1$, $\mu_A^*(1) = 0$, но $\mu_A^*(7)$ е неопределено, в смисъл, че не е известно дали уравнението $x^3 - y^2 = 7$ има други решения, освен $(2, 1)$ и $(32, 181)$.

Да положим $\nu_A^*(x) = \mu_{\bar{A}}^*(x)$. Следователно

$$0 \leq \mu_A^*(x),\ \nu_A^*(x) \leq 1, \quad 0 \leq \mu_A^*(x) + \nu_A^*(x) \leq 1.$$

Интуиционистки размитото множество ще има вида:

$$\{<x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)> / x \in E\}.$$

За него /1/ - /3/, /7/ и /8/ не се променят, а останалите равенства добиват вида:

/4'/ $\bar{A}^* = \{<x, \nu_A^*(x), \mu_A^*(x)> / x \in E\}$,

$\mu_{\bar{A}}^*(x) = \nu_A^*(x), \quad \nu_{\bar{A}}^*(x) = \mu_A^*(x)$;

/5'/ $A^* \cap B^* = \{<x, \min(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x)), \max(\nu_A^*(x), \nu_B^*(x))> / x \in E\}$,

$\mu_{A \cap B}^*(x) = \min(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))$,

$\nu_{A \cap B}^*(x) = \max(\nu_A^*(x), \nu_B^*(x))$;

/6'/ $A^* \cup B^* = \{<x, \max(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x)), \min(\nu_A^*(x), \nu_B^*(x))> / x \in E\}$,

$\mu_{A \cup B}^*(x) = \max(\mu_A^*(x), \mu_B^*(x))$,

$\nu_{A \cup B}^*(x) = \min(\nu_A^*(x), \nu_B^*(x))$;

/9'/ $\mathcal{P}_M(E) = \{\{<x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)> / \mu_A^*(x) \in M', \nu_A^*(x) \in M''\} / A \subset E, M' \subset M, M'' \subset M\}$;

/10'/ $A^*.B^* = \{<x, \mu_A^*(x).\mu_B^*(x), \nu_A^*(x) + \nu_B^*(x) - \nu_A^*(x).\nu_B^*(x)> / x \in E\}$,

$\mu_{A.B}^*(x) = \mu_A^*(x).\mu_B^*(x)$,

$\nu_{A.B}^*(x) = \nu_A^*(x) + \nu_B^*(x) - \nu_A^*(x).\nu_B^*(x)$;

/11'/ $A^* \hat{+} B^* = \{<x, \mu_A^*(x) + \mu_B^*(x) - \mu_A^*(x).\mu_B^*(x), \nu_A^*(x).\nu_B^*(x)> / x \in E\}$,

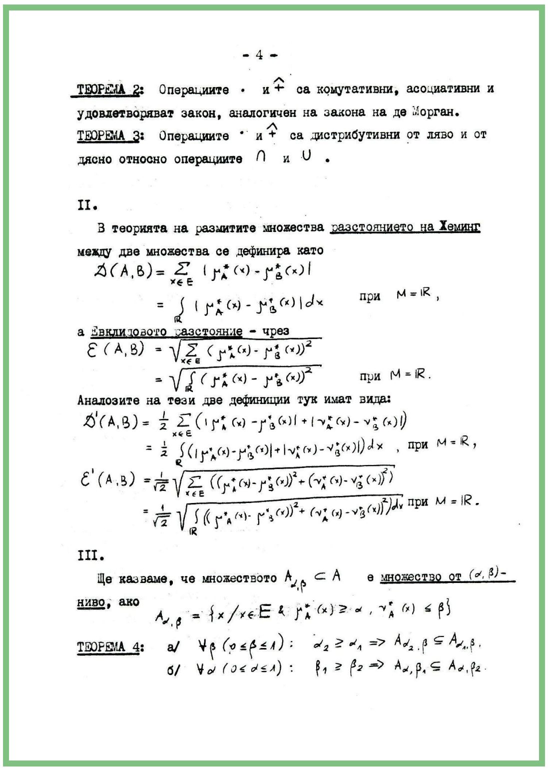
$\mu_{A \hat{+} B}^*(x) = \mu_A^*(x) + \mu_B^*(x) - \mu_A^*(x).\mu_B^*(x)$,

$\nu_{A \hat{+} B}^*(x) = \nu_A^*(x).\nu_B^*(x)$.

Подобно на [1] са в сила следните твърдения:

ТЕОРЕМА 1: Операциите $\cap$ и $\cup$ са комутативни, асоциативни, дистрибутивни помежду си от ляво и от дясно, идемпотентни и удовлетворяват закона на де Морган.

Page 3



\- 4 -

ТЕОРЕМА 2: Операциите $\cdot$ и $\hat{+}$ са комутативни, асоциативни и удовлетворяват закон, аналогичен на закона на де Морган.

ТЕОРЕМА 3: Операциите $\cdot$ и $\hat{+}$ са дистрибутивни от ляво и от дясно относно операциите $\cap$ и $\cup$.

II.

В теорията на размитите множества разстоянието на Хеминг между две множества се дефинира като

$$\mathcal{D}(A,B) = \sum_{x \in E} |\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)|$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)| dx \quad \text{при } M = \mathbb{R},$$

а Евклидовото разстояние - чрез

$$\mathcal{E}(A,B) = \sqrt{\sum_{x \in E} (\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2}$$

$$= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2} \quad \text{при } M = \mathbb{R}.$$

Аналозите на тези две дефиниции тук имат вида:

$$\mathcal{D}'(A,B) = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} (|\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)| + |\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x)|)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x)| + |\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x)|) dx, \quad \text{при } M = \mathbb{R},$$

$$\mathcal{E}'(A,B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{x \in E} ((\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2 + (\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x))^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} ((\mu_A^*(x) - \mu_B^*(x))^2 + (\nu_A^*(x) - \nu_B^*(x))^2) dx} \quad \text{при } M = \mathbb{R}.$$

III.

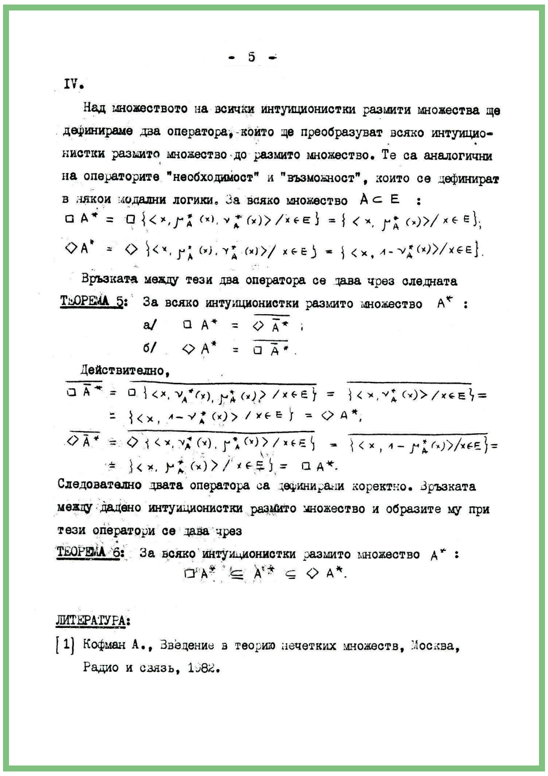
Ще казваме, че множеството $A_{\alpha,\beta} \subset A$ е множество от (α, β)-ниво, ако

$$A_{\alpha,\beta} = \{x / x \in E \ \& \ \mu_A^*(x) \geq \alpha, \nu_A^*(x) \leq \beta\}$$

ТЕОРЕМА 4: а/ $\forall \beta\ (0 \leq \beta \leq 1): \quad \alpha_2 \geq \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_2,\beta} \subseteq A_{\alpha_1,\beta}$.

б/ $\forall \alpha\ (0 \leq \alpha \leq 1): \quad \beta_1 \geq \beta_2 \Rightarrow A_{\alpha,\beta_1} \subseteq A_{\alpha,\beta_2}$.

Page 4



\- 5 -

IV.

Над множеството на всички интуиционистки размити множества ще дефинираме два оператора, които ще преобразуват всяко интуиционистки размито множество до размито множество. Те са аналогични на операторите "необходимост" и "възможност", които се дефинират в някои модални логики. За всяко множество $A \subset E$:

$$\Box A^* = \Box \{<x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)> / x \in E\} = \{<x, \mu_A^*(x)> / x \in E\},$$

$$\Diamond A^* = \Diamond \{<x, \mu_A^*(x), \nu_A^*(x)> / x \in E\} = \{<x, 1 - \nu_A^*(x)> / x \in E\}.$$

Връзката между тези два оператора се дава чрез следната

ТЕОРЕМА 5: За всяко интуиционистки размито множество A^*:

а/ $\Box A^* = \overline{\Diamond \bar{A}^*}$;

б/ $\Diamond A^* = \overline{\Box \bar{A}^*}$.

Действително,

$$\overline{\Box \bar{A}^*} = \overline{\Box \{<x, \nu_A^*(x), \mu_A^*(x)> / x \in E\}} = \overline{\{<x, \nu_A^*(x)> / x \in E\}} =$$

$$= \{<x, 1 - \nu_A^*(x)> / x \in E\} = \Diamond A^*,$$

$$\overline{\Diamond \bar{A}^*} = \overline{\Diamond \{<x, \nu_A^*(x), \mu_A^*(x)> / x \in E\}} = \overline{\{<x, 1 - \mu_A^*(x)> / x \in E\}} =$$

$$= \{<x, \mu_A^*(x)> / x \in E\} = \Box A^*.$$

Следователно двата оператора са дефинирани коректно. Връзката между дадено интуиционистки размито множество и образите му при тези оператори се дава чрез

ТЕОРЕМА 6: За всяко интуиционистки размито множество A^*:

$$\Box A^* \subseteq A^* \subseteq \Diamond A^*.$$

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Кофман А., Введение в теорию нечетких множеств, Москва, Радио и связь, 1982.

Page 5